PROJEKTIVE UND NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHILLING
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DANZIG

IN ZWEI BÄNDEN

ZWEITER BAND

NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

AUF DER GRUNDLAGE DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

1931
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

NICHTEUKLIDISCHE GEOMETRIE

AUF DER GRUNDLAGE DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHILLING
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DANZIG

MIT 175 FIGUREN

1931
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

MEINER LIEBEN FRAU

GEWIDMET

Vorwort zu Band I und II.

Was kann der Mensch im Leben
mehr gewinnen, als daß sich Gott —
Natur ihm offenbare? Goethe.

„Lieber Herr Kollege! Indem ich für Ihren Glückwunsch zu meinem Geburtstage bestens danke, freut es mich insbesondere zu hören, daß Sie auch Ihrerseits zur Verbreitung der projektiven Auffassung der nichteuklidischen Geometrie beitragen wollen. Es muß doch endlich gelingen, die Gleichgültigkeit oder Kurzsichtigkeit des Publikums zu überwinden. Mit vielen Grüßen Ihr alter Klein."

Dies Schreiben meines hochverehrten Lehrers Felix Klein ist die Antwort auf meinen Glückwunsch zu seinem 75. Geburtstage im Jahre 1924. In meinem Briefe hatte ich den Gedanken ausgeführt, meinerseits eine Einführung in die von Klein mit genialem Blick geschaffene nichteuklidische Geometrie in projektiver Behandlung zu verfassen, um weitesten Kreisen der Mathematiker und der Physiker, insbesondere auch den Studienräten an unseren höheren Schulen und den Studierenden, einen möglichst einfachen Zugang zu dieser wunderbaren neuen Welt zu eröffnen, die ja besonders auch die Elementarmathematik der Schule von einem höheren Gipfel aus zu überblicken und in ihren Einzelheiten richtig zu würdigen gestattet und auch die geometrische Grundlage für das Verständnis der Relativitätstheorie bildet.[1])

Mein Buch ist aus den Vorlesungen hervorgegangen, die ich in den Jahren 1923—24 und 1927—28 an unserer Technischen Hochschule gehalten habe. Die erste Einführung in die nichteuklidische Geometrie verdanke ich selbst Felix Klein, als dessen Assistent ich im W.-S. 1889—90 und im S.-S. 1890 seine Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie ausgearbeitet und deren autographische Herausgabe ausgeführt habe.[2])

Es gibt ja nun noch einen anderen Weg, um zur nichteuklidischen Geometrie unseres wirklichen Raumes zu gelangen, den Weg, den schon Bolyai und Lobatschefskij gewandert sind, der aber auch schließlich, besonders wenn es

1) Man sehe deswegen z. B. H. Reichenbach, Atom und Kosmos, das physikalische Weltbild der Gegenwart, Berlin 1930.

2) Vgl. auch das umfassende Werk: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, neu bearbeitet von W. Rosemann, Berlin 1928, das zum weiteren Studium hiermit empfohlen sei.

sich um höhere Untersuchungen handelt, in den Kleinschen Weg einmündet.[1]) Dieser andere Weg benutzt im wesentlichen die Methode der euklidischen Elementarmathematik, welch' letztere ja auch ihre Fortsetzung in der kartesischen analytischen Geometrie findet. Beide Wege zur nichteuklidischen Geometrie haben ihre ausgeprägte Eigenart und ihr besonderes Interesse und bauen sich ja auch auf denselben Axiomen auf. Der Weg, den wir nun wandern wollen, führt zunächst zum Aufbau der projektiven Geometrie ohne Benutzung vom Parallelenaxiom und von den anderen metrischen Axiomen, den Axiomen der Bewegung oder der Kongruenz. Dieser eigenartige Aufbau der projektiven Geometrie dürfte aber auch für sich besonderes Interesse beanspruchen.

Man hat gelegentlich wohl den Ideen Kleins vorgeworfen, daß bei der Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie doch die euklidische Geometrie be nutzt werde.[2]) Unsere Entwicklungen werden mit aller Deutlichkeit zeigen, daß dies nicht zutreffend ist.

Der mit der Literatur bereits vertraute Leser wird gewiß finden, daß nicht nur fast überall neue Darstellungsarten notwendig waren, um den leicht gangbaren Weg zu schaffen, sondern daß auch vielfach neue Ergebnisse gewonnen sind. Ich weise beispielsweise im ersten Bande hin auf die einfache Einführung der uneigentlichen Elemente mit Hilfe des Desarguesschen Satzes, sowie den Beweis des Satzes 3a im § 10 bei der Einführung dyadisch-irrationaler Koordinatenzahlen, sowie die neue Abbildung der projektiven Ebene auf eine geschlossene, singularitätenfreie Fläche im begrenzten Gebiet, auf das Erweiterungsaxiom und die biprojektive Ebene. Aus dem zweiten Bande mag hier hervorgehoben werden die sehr einfache Art, den absoluten Kegelschnitt in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie zu gewinnen, die Einführung der Hauptweltkonstanten $+\varkappa$ bzw. $-\varkappa$, sowie der Weltmaßstrecke m und ihre Beziehung zur Länge der ganzen Geraden und zu dem Begriff der Weltkrümmung, die Bedeutung der fünf allgemeinen Weltkonstanten, die neue überraschend einfache Ableitung der trigonometrischen Formeln in der nichteuklidischen Geometrie, die Entwicklung des Dreiecksinhalts, besonders der neue Beweis der Endlichkeit des Inhalts eines dreifach asymptotischen Dreiecks.[3])

---

1) Von neueren deutschen Lehrbüchern dieser Richtung nenne ich vor allem: H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Auflage, Leipzig 1923; R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, Hyperbolische Geometrie der Ebene, Leipzig 1927.

2) Diesen Vorwurf hat schon L. Bieberbach zurückgewiesen in seiner sehr lesenswerten Abhandlung: Über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie im 19. Jahrhundert, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wiss., Bd. XVIII, 1925, S. 393.

3) Es sei hier auch auf meine besonders erschienene kleine Schrift: Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie, hingewiesen, die als eine sehr einfache Einführung in die neuen Anschauungen gelten mag.

Bei der Abfassung meines Werkes ist mir die Strenge der Beweisführung vorbildlich gewesen, die ich bei meinem hochverehrten Lehrer H. A. Schwarz, dem bedeutenden Schüler von Weierstraß, zu würdigen kennenlernte, sowie die schöpferische Phantasie und Anschaulichkeit in den Vorlesungen von F. Klein. So habe ich bei aller Strenge der logischen Darstellung doch stets versucht, auch die Anschauung, insbesondere durch Hinzufügen zahlreicher Figuren, zu ihrem vollen Rechte kommen zu lassen, getreu dem Grundsatz: geometria geometrice. Dem mir vorschwebenden wünschenswerten Ziele entsprechend, möglichst viele Mathematiker und Physiker anzuregen, mit den Gedankengängen der nichteuklidischen Geometrie sich vertraut zu machen, habe ich natürlich auch auf die didaktische und pädagogische Durcharbeitung der einzelnen Untersuchungen besondere Sorgfalt zu verwenden mich bemüht. Übrigens habe ich mich im wesentlichen, um das Eindringen in die neuen Ideen zu erleichtern, auf die Betrachtung der *ebenen* nichteuklidischen Geometrie beschränkt. Jedoch habe ich nicht darauf verzichtet, diese Betrachtung nun auch bis zu den höchsten Gipfeln fortzusetzen, von denen aus doch einmal die beste Aussicht ist. Hervorheben möchte ich noch, daß spezielle Vorkenntnisse außer einfachen Sätzen der Analysis nicht vorausgesetzt werden. Es sollte mich freuen, wenn das Ideal nun auch mehr und mehr erreicht wird, daß die nichteuklidische Geometrie Gemeingut aller Mathematiker und Physiker wird, vor allem auch der Studierenden und der Lehrer an unseren höheren Schulen.

Mein innigster Dank gilt vor allem denjenigen Körperschaften, die in hochherziger Weise durch namhafte Druckkostenunterstützung die Herausgabe des Werkes möglich gemacht haben, wie der Gesellschaft der Freunde der Technischen Hochschule Danzig, dem Senat der Freien Stadt Danzig, Abteilung für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung und dem Preußischen Ministerium für Wissenschaft, Kunst und Volksbildung. Nicht minder danke ich dem Verlage B. G. Teubner für sein bereitwilliges Eingehen auf meine Wünsche.

Aufs tiefste bedauern muß ich es, daß es mir nicht mehr vergönnt ist, das erste Exemplar meines Buches meinem hochverehrten Lehrer Felix Klein überreichen zu können.

Danzig-Langfuhr, im November 1930. **F. Schilling.**

Inhalt.

Erster Teil: Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie.

Erster Teil.

Grundlagen der nichteuklidischen Geometrie.

Erster Abschnitt.

Die Axiome der Bewegung und ihre Folgerungen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über die Stellung der metrischen Geometrie im Gegensatz zur projektiven Geometrie.

Wir haben bisher erkannt, daß die *projektive Geometrie* sich tatsächlich ohne ein Parallelenaxiom entwickeln läßt, ja auch ohne Axiome der Kongruenz oder der Bewegung.

1. Wir verstehen eben unter der projektiven Geometrie die Gesamtheit aller Eigenschaften, die bei der Gruppe aller projektiven Transformationen (vgl. Bd. I, Satz 13 S. 135) *unverändert, invariant bleiben.* Zu diesen Eigenschaften gehört also z. B. der Satz von der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte (Bd. I, S. 170 und 171). Der projektiven Geometrie tritt nun, wie wir bereits S. 21 im Bd. I andeuteten, die *metrische Geometrie* gegenüber.

2. Unter der metrischen Geometrie verstehen wir die Gesamtheit aller Eigenschaften, die bei der Gruppe aller vorliegenden Bewegungen unverändert bleiben.

Wir haben bei dieser Definition jedoch bereits unseren folgenden Entwicklungen vorgegriffen, da wir die Gruppe der Bewegungen noch gar nicht festgelegt haben. Freilich ist uns dieser Begriff speziell in der euklidischen Geometrie, ich möchte sagen, einigermaßen geläufig. Wir werden zwar später eine viel tiefere Einsicht auch in diese Verhältnisse gewinnen.

Wir wissen eben hier in der euklidischen Geometrie z. B.: Ein rechter Winkel (oder das Senkrechtstehen zweier Geraden aufeinander) bleibt zwar bei den Bewegungen in seiner Ebene und sogar bei den Ähnlichkeitstransformationen der Ebene unverändert, aber nicht bei einer allgemeinen projektiven Transformation. Dagegen der Inhalt eines Dreiecks bleibt zwar bei den Bewegungen des Dreiecks in seiner Ebene unverändert, aber nicht bei einer Ähnlichkeitstransformation oder bei einer allgemeinen projektiven Transformation der Ebene. Eine solche ergibt sich anschaulich auch, wenn wir die gegebene Ebene $\mathfrak{E}$ von einem außerhalb gelegenen Zentrum O aus auf eine zweite Ebene $\mathfrak{E}'$ projizieren und dann die Ebene $\mathfrak{E}'$ um ihre Schnittlinie s mit

der Ebene 𝔈 in letztere umlegen. Dies besagt eben: Die Begriffe des rechten Winkels und des Inhaltes des Dreiecks sind keine Invarianten gegenüber den projektiven Transformationen, wohl aber gegenüber den Bewegungen; es sind also *metrische Begriffe.* Der Satz: Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe ist also auch ein *metrischer Satz.* Der Begriff des rechten Winkels und des Senkrechtstehens zweier Geraden aufeinander und auch etwa der Satz von der Gleichheit der Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck sind überdies ja invariante Eigenschaften aller Ähnlichkeitstransformationen der Ebene (einschließlich der Bewegungen).

Wir können hier jedoch gleich kurz auf den Grundgedanken des berühmten sogenannten *Erlanger Programms* von Felix Klein hinweisen.[1])

3. Unter einer speziellen Geometrie versteht man stets die Gesamtheit aller Definitionen geometrischer Begriffe und aller geometrischen Sätze, die bei der gewählten Gruppe von Transformationen ungeändert bleiben.

Wir können also *in der euklidischen Ebene* z. B. von der *Geometrie der Ähnlichkeit* (oder von der äquiformen Geometrie nach der Benennung von Herrn Heffter) bzw. von der *Geometrie der Affinität,* der affinen Geometrie, sprechen als der Gesamtheit aller Definitionen und Sätze, die bei der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen bzw. aller affinen Transformationen unverändert bleiben. Hierbei verstehen wir unter den affinen Transformationen alle projektiven Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade der euklidischen Ebene unverändert lassen.

Der Aufbau der analytischen Geometrie in dem oft von uns genannten Lehrbuche von Heffter-Koehler ist ein vorzügliches Beispiel für den Gedanken des Erlanger Programms.

Für uns kommt nur der Aufbau der metrischen Geometrie in Betracht.

Jedenfalls werden wir jetzt, um die metrische Geometrie und damit auch die *Unterscheidung der hyperbolischen, elliptischen und parabolischen oder euklidischen Geometrie* zu gewinnen, neue Axiome einführen, natürlich auch das Parallelenaxiom in der einen oder anderen Form.

Zum Aufbau der projektiven Geometrie hatten wir ja nur die *Axiome der Verknüpfung und Anordnung* von Hilbert (oder ihnen gleichwertige Axiome)

1) F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, 1872, abgedruckt: Math. Ann. Bd. 43, 1893 und Gesammelte Math. Abhandlungen I, Berlin 1921, S. 460ff. G. Fano, Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, Enzyklopädie der math. Wiss. III, S. 289. Vgl. auch für die Schulgeometrie: E. Salkowski, Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterrichts, Zeitschrift für math. und naturwiss. Unterricht, 7. Beiheft, Leipzig 1924, S. 1—59, sowie A. Schülke, Das Erlanger Programm und die Schulgeometrie, Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 58. Jahrgang, 1927, Seite 401.

und das *Stetigkeitsaxiom* der S. 72 im Bd. I benutzt, wie wir noch einmal hervorheben wollen. Wir wollen jetzt also zunächst noch bestimmte *Axiome der Bewegung* hinzunehmen, daraus auch die *Kongruenzsätze* gewinnen[1]) und dann mit Hilfe des einen oder anderen *Parallelenaxioms* die verschiedenen möglichen nichteuklidischen Geometrien neben der euklidischen Geometrie selbst entwickeln.

§ 2. Die Axiome der Bewegung.

Es seien nun *drei Axiome der Bewegung in der Ebene* aufgestellt, wobei, wie wir ausdrücklich hervorheben, nur die Anfangs- und die Endlagen der bewegten Elemente in Betracht kommen:

1. Das projektive Bewegungsaxiom:

Bei jeder Bewegung gehen Punkte und Geraden der Ebene eindeutig in Punkte und Geraden über.

2. Das Eindeutigkeitsaxiom:

Es gibt stets eine und nur eine Bewegung $\mathfrak{B}$, welche eine Gerade g und einen gegebenen Punkt S auf ihr in dieselbe oder eine andere gegebene Gerade g′ und einen gegebenen Punkt S′ auf ihr überführt, ferner hierbei für die Umgebung von S bzw. S′ eine bestimmte Richtung von g in eine bestimmte Richtung von g′ und außerdem die auf einer bestimmten Seite von g (also außerhalb g) gelegenen Punkte in die auf einer bestimmten Seite von g′ gelegenen Punkte.

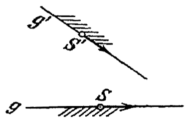


Fig. 1.

Hierbei sind die Geraden g, g′ und die Punkte S, S′ stets eigentliche Elemente (Fig. 1; in dieser und den folgenden Figuren wird die Richtung einer Geraden durch eine Pfeilspitze, die Seite einer Geraden durch eine Schraffierung angegeben).

Das Entsprechen der bestimmten Richtungen von g und g' soll natürlich heißen, daß die in der angegebenen Richtung nahe an S gelegenen Punkte von g in die in der angegebenen Richtung nahe an S' gelegenen Punkte von g' übergehen.

Hervorgehoben sei jedoch noch hinsichtlich des Axioms 2 folgendes: Wenn durch die einzelne Bewegung $\mathfrak{B}$, wie sie dort festgelegt ist, nun auch etwa der

1) Bei der Aufstellung der Bewegungsaxiome und der Folgerungen daraus schließen wir uns im wesentlichen an Herrn F. Schur an (vgl. dessen „Grundlagen der Geometrie", a. a. O. S. 28ff.). Herr Hilbert verfährt insofern anders, als er erst Kongruenzaxiome aufstellt und damit die Bewegung einführen will (vgl. deswegen l. c. 1930, S. 15ff. und S. 45ff.). Man vergleiche in dieser Hinsicht meine eigene Arbeit, die aus einem Schreiben an Herrn Hilbert entstanden ist: Kongruenz und Bewegung, eine philosophisch-geometrische Betrachtung, Math. Ann. Bd. 93, 1924, S. 37—45. Diese Arbeit ist freilich erst verständlich, wenn man mit der nichteuklidischen Geometrie bereits vertraut ist. Vgl. auch M. Pasch, a. a. O. 1926, S. 123ff.

eigentliche Punkt T von g in den eigentlichen Punkt T' von g' übergeht, so kann natürlich dieselbe Bewegung auch mit Hilfe des Punktepaares T, T' und den zugehörigen Richtungen und Seiten der Geraden g, g' in der Umgebung der Punkte T, T' festgelegt werden. Und wenn durch die Bewegung $\mathfrak{B}$ auch die Gerade h mit dem Punkt H und mit bestimmter Richtung und Seite in die Gerade h' mit H' und bestimmter Richtung und Seite übergeht, so kann dieselbe Bewegung auch mit Hilfe dieser Geraden h, h' festgelegt werden.

3. Das Gruppenaxiom:

Werden zwei Bewegungen nacheinander ausgeführt, so kann man stets auch die Anfangslage der Ebene in die Endlage durch eine Bewegung überführen, d. h.: Geht durch eine erste Bewegung $\mathfrak{B}_1$ die Gerade g mit bestimmtem Punkte S, bestimmter Richtung und Seite in die Gerade g^* mit bestimmtem Punkte S^* und bestimmter Richtung und Seite über und durch eine zweite Bewegung $\mathfrak{B}_2$ die Gerade g^* mit dem Punkte S^* und der Richtung und Seite in die Gerade g' mit bestimmtem Punkte S' und bestimmter Richtung und Seite, so soll die somit festgelegte Überführung der Anfangslage der Ebene in die Endlage auch gegeben sein durch die Bewegung $\mathfrak{B}$, welche g mit bestimmtem Punkte, Richtung und Seite in g' mit bestimmtem Punkte, Richtung und Seite überführt (Fig. 2).

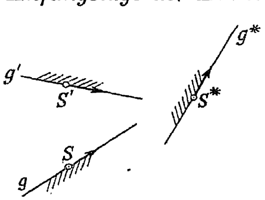


Fig. 2.

Wir können dies symbolisch schreiben

$$\mathfrak{B}_1 \cdot \mathfrak{B}_2 \equiv \mathfrak{B},$$

d. h. die Aufeinanderfolge der Bewegungen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ ist äquivalent, gleichwertig, der Bewegung $\mathfrak{B}$.

Sogleich wollen wir noch folgende wichtige Bemerkung anschließen. In dem Axiom 2 ist von *eigentlichen* Punkten und Geraden die Rede. Hierdurch wird bekundet, daß *dieses Axiom schon in engster Beziehung zu der Einführung eines bestimmten Parallelenaxioms steht.* Im § 4 Bd. I haben wir ja schon ausführlich von uneigentlichen Punkten und Geraden gesprochen. Doch da wir den Aufbau der projektiven Geometrie allein in einem begrenzten Gebiet vorgenommen haben, so war es bisher ganz gleichgültig, ob in der projektiven Ebene uneigentliche Elemente (auf Grund des einen oder anderen Parallelenaxioms) anzunehmen sind oder nicht. Wir brauchten eigentlich bisher nur zwischen inneren und äußeren Punkten zu unterscheiden (S. 34 im § 4 Bd. I). Bei dem Axiom 2 dagegen können wir uns keineswegs etwa auf ein Dreiecksgebiet beschränken. Doch da wir ja sehr wohl schon allgemein über das Auftreten uneigentlicher Elemente unterrichtet sind, wollen wir dementsprechend später die vorstehenden Gedanken im einzelnen weiter ausführen.

Wir betrachten nun die spezielle Bewegung, *bei der die Geraden g, g′ identisch sind, ebenso die Punkte S, S′ und die entsprechenden Richtungen und Seiten von S bzw. S′ aus.*

4. Diese Bewegung kann ersichtlich nur die Identität oder Ruhe sein. Denn würde durch diese Bewegung etwa der Punkt A auf g in den davon verschiedenen Punkt A' übergehen, so müßte bei Wiederholung dieser Bewegung der Punkt A' in einen neuen Punkt A'' übergehen (Fig. 3a). Die Aufeinanderfolge beider Bewegungen muß aber der ersten Bewegung allein gleich sein nach dem Eindeutigkeitsaxiom. Also muß $A = A'$ sein, d. h. jeder Punkt der Geraden g muß sich selbst entsprechen. Auch jeder andere Punkt B der Ebene muß sich aus analogem Grunde selbst entsprechen (Fig. 3b). Denn wenn der Punkt B etwa in den Punkt B' übergeführt würde, so müßte ja die Gerade BB' in sich übergehen, da auch ihr (eigentlicher oder uneigentlicher) Schnittpunkt C mit g in sich übergeht. Dann aber könnte die mehrmalige Aufeinanderfolge dieser gleichen Bewegung wieder nicht identisch sein mit der ersten Bewegung allein. *Die Identität oder Ruhe soll natürlich in die Gesamtheit der Bewegungen eingeschlossen sein.*

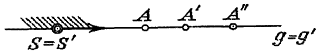


Fig. 3a.

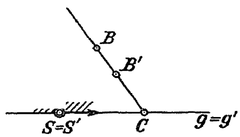


Fig. 3b.

Aus den drei Axiomen folgt sogleich der Satz:

5. Zu jeder Bewegung 𝔅 gehört auch die umgekehrte Bewegung 𝔅′, d. h. die Bewegung, welche g′ mit dem Punkte S′ und der betreffenden Richtung und Seite in g mit dem Punkte S und der betreffenden Richtung und Seite überführt, wobei die Aufeinanderfolge von 𝔅 und 𝔅′ eben die Identität ist.

Bei allen Bewegungen, bei denen die Geraden g, g' einem begrenzten Gebiet angehören, können wir ja auch die zugehörigen Punkte S, S' als innere Punkte wählen.

6. Bei solchen Bewegungen können wir dann zwischen gleichsinniger bzw. ungleichsinniger Bewegung unterscheiden, je nachdem für eine auf dem begrenzten Gebiet stehende Person, die jedesmal der Pfeilspitze von g und von g′ entgegensieht, die entsprechenden Seiten von g, g′ beide zur linken oder beide zur rechten Hand bzw. die eine zur linken, die andere zur rechten Hand gelegen ist. Die Fig. 1 z. B. können wir leicht so in ein Dreiecksgebiet eingeschlossen denken, daß sie eine ungleichsinnige Bewegung angibt. (Wenn die elliptische Geometrie gilt, können wir übrigens die Figur auch so in ein Dreiecksgebiet einschließen, daß sie eine gleichsinnige Bewegung darstellt.)

Aus dem Axiom 1 folgt nun gemäß der (ja auf vier gegebenen Punkten sich aufbauenden) Möbiusschen Netzkonstruktion der allgemeine Satz:

7. Mit jeder Bewegung ist eine projektive Transformation der ganzen Ebene, d. h. aller eigentlichen und uneigentlichen Punkte der Ebene verknüpft.

Dementsprechend heben wir noch folgende Eigenschaft der Bewegung hervor:

8. Jede Bewegung ist insofern „stetig“, als vier Punkte einer beliebigen Geraden g, die sich paarweise trennen, stets wieder in vier Punkte der entsprechenden Geraden übergehen, die sich analog paarweise trennen. Mit anderen Worten: Werden die Geraden g, g' in den bestimmten Richtungen durchlaufen, so treffen wir die Punkte der Geraden g' in derselben Reihenfolge an wie die ihnen entsprechenden Punkte der Geraden g.

Endlich folgt aus dem Axiom 3 sofort der wichtige Satz:

9. Alle Bewegungen bilden eine Gruppe, die Bewegungsgruppe, und zwar eine dreigliedrige Untergruppe der achtgliedrigen Gruppe aller projektiven Transformationen (vgl. den Satz 13 S. 135 Bd. I).

Daß es ∞^3 verschiedene Bewegungen gibt, folgt ja einfach daraus: Wenn die Gerade g mit S gegeben ist, so können wir auf ∞^3 Weisen die entsprechenden Elemente g', S' wählen.

Es ist wieder überraschend, welche Fülle von weiteren Folgerungen wir aus den drei Bewegungsaxiomen ableiten können. Aus den nachfolgenden Betrachtungen wird sich vor allem aber auch ergeben, daß die drei Bewegungsaxiome nicht zu einem Widerspruch führen können.

§ 3. Die Umwendung um eine eigentliche Gerade g.

Wir wollen zunächst die folgende spezielle Bewegung definieren:

1. Folgende Bewegung soll als Umwendung 𝔖 um die (eigentliche) Gerade g, die zugehörige Achse, bezeichnet sein: Es soll g in sich übergehen, ebenso ein Punkt S auf g und eine gegebene Richtung der Geraden g von S aus; jedoch sollen die beiden Seiten der Geraden g in der Umgebung von S sich gegenseitig vertauschen (Fig. 4).[1])

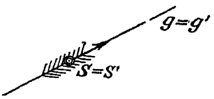


Fig. 4.

Nach dem Axiom 2 S. 3 ist eine solche Bewegung stets eindeutig bestimmt. Es gilt sogleich der Satz:

2. Die Umwendung 𝔖 führt zweimal angewandt zur Identität.

Wir drücken dies durch die symbolische Gleichung aus:

$$\mathfrak{S}^2 \equiv 1,$$

1) Umwendungen um eine Gerade sowie auch die Zusammensetzungen nichteuklidischer Bewegungen aus solchen sind von mir bereits in meiner Arbeit „Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarzschen s-Funktion“, Math. Ann. Bd. 44, 1894, S. 183ff. benutzt. Auf S. 186 daselbst ist auch die ältere Literatur über Umwendungen im euklidischen Raum angegeben.

die wir lesen: $\mathfrak{G}^2$, d. h. die zweimalige Wiederholung der Bewegung $\mathfrak{G}$, ist gleichwertig der Identität.

Wir können ferner erkennen:

3. Bei der Umwendung $\mathfrak{G}$ muß jeder Punkt von g in sich übergehen.

Wir können ja den Punkt S in einem begrenzten Gebiet gelegen annehmen, überhaupt alle im folgenden benutzten Punkte. Würde dann bei dieser Umwendung die Strecke $\overrightarrow{SA}$ in $\overrightarrow{SA'}$ übergehen, die etwa „größer" als SA sei, so daß also A zwischen S, A' liegt (Fig. 5), so würde also an der Stelle A ein Punkt B' liegen, der aus einem Punkte B, der zwischen S, A liegt, hervorgegangen wäre. Bei nochmaliger Umwendung würde dann B' nach A' gelangen, also nicht nach B zurück, was doch sein müßte. Folglich muß A sich selbst entsprechen.

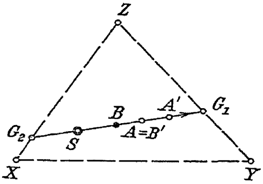


Fig. 5.

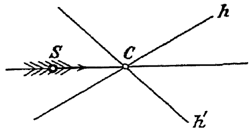


Fig. 6.

Bei der Festlegung der Umwendung $\mathfrak{G}$ um g ist also der Punkt S unwesentlich; er kann durch jeden anderen Punkt A von g ersetzt werden. Aus dem Satze 3 folgt ferner:

4. Jede Gerade h und die aus ihr durch Umwendung um g entstandene Gerade h′ müssen sich auf der Achse g schneiden (Fig. 6).

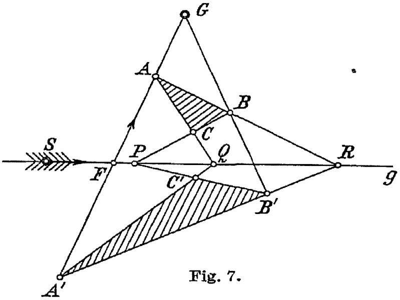


Fig. 7.

Aus dem Satze 3 aber folgt:

5. Die Verbindungslinie AA' zweier entsprechender Punkte A, A' außerhalb g muß in sich übergehen.

Einem Dreieck ABC entspricht also durch die Umwendung um g ein Dreieck $A'B'C'$, so daß entsprechende Seiten sich auf g schneiden (Fig. 7). (Für die Fig. 7, wie für alle späteren Figuren, gilt die allgemeine Bemerkung: Die Figuren sind evtl. als Abbilder der eigentlichen Figuren in einem vor unseren Augen liegenden begrenzten Gebiet anzusehen, auf Grund des Satzes 8, S. 49 im Bd. I, wenn einzelne Punkte, etwa der Punkt G, in Wirklichkeit zu weit fortliegen oder gar uneigentliche Punkte sind.) Dann müssen nach dem Desarguesschen Satze die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch denselben (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt G gehen.

6. Dieser Punkt G muß sich also selbst entsprechen.

7. Die Umwendung um g ist also eine Zentralkollineation (vgl. Bd. I, § 5).

§ 4. Der absolute Pol G der Geraden g.

Die letzten Sätze gestatten nun wichtige Folgerungen zu entwickeln. Zunächst stellen wir die *Definition* auf:

1. Wir nennen den zu jeder eigentlichen Geraden g zugeordneten Punkt G den absoluten Pol von g und g die absolute Polare zu G.

Hiermit ist noch keineswegs ausgesprochen, daß es umgekehrt zu jedem Punkt G stets eine und nur eine absolute Polare gibt. Es wird sich später zeigen, daß dies auch in der parabolischen oder euklidischen Geometrie nicht der Fall ist.

Wohl aber gilt der Satz:

2. Zu jeder eigentlichen Geraden g gehört ein bestimmter absoluter Pol G.

Es gelten weiter die für jede Zentralkollineation geltenden Sätze:

3. Bei der Umwendung um g (d. h. der zugehörigen projektiven Transformation, der Zentralkollineation) geht außer den einzelnen Punkten von g nur noch ihr absoluter Pol G von allen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkten der Ebene in sich über.

4. Außer der Achse g und den Geraden durch ihren absoluten Pol G geht keine Gerade der Ebene in sich über.

Denn eine von g verschiedene Gerade h geht nur dann in sich über, wenn auf h sich entsprechende Punkte befinden.

Wegen der Eigenschaft des Satzes 2 S. 6 müssen nun je zwei Punkte A, A' sich *wechselseitig* entsprechen, d. h.:

5. Die Umwendung ist eine wechselseitige oder involutorische Zentralkollineation.

Wir behaupten nun weiter als Folgerung des letzten Satzes den Satz:

6. Je zwei entsprechende Punkte A, A' liegen mit dem absoluten Pol G und dem Schnittpunkt F ihrer Verbindungslinie und der Achse g harmonisch (Fig. 7 S. 7). Es trennen sich also auch stets die Punktepaare G, F und A, A'.

Aus dem Satze 5 folgt nämlich

$$(FGAA') = (FGA'A).$$

Nun ist aber (nach dem Satze 15 S. 109 Bd. I)

$$(FGA'A) = \frac{1}{(FGAA')}.$$

Also ist
$$(FGAA')^2 = 1,$$

d. h. da $(FGAA') = +1$ ausgeschlossen, weil sonst $A = A'$ (nach der Gleichung (5) S. 104 Bd. I) sein müßte,

$$(FGAA') = -1.$$

Wir können den Satz 6 uns indes noch anschaulicher entwickeln: Es seien in der Fig. 8 außer der Geraden g und ihrem absoluten Pol G zwei entsprechende Punktepaare A, A' und B, B' der Umwendung um g gezeichnet. Dann gehen die Verbindungslinien AA' und BB' durch G und die Verbindungslinien AB, $A'B'$ schneiden sich in R auf g, die Verbindungslinien AB', BA' in S auf g. Wir haben also das vollständige Viereck $ABB'A'$ vor uns. Folglich ist nach dem Satze 7 S. 55 Bd. I

$$(FGAA') = -1.$$

Wir können noch folgende Bemerkung hinzufügen, durch die wir eigentlich an früher Ausgeführtes erinnern: Durch zwei ihrer Punkte F, G wird ja eine projektive Gerade h (d. h. die Punktreihe h mit allen eigentlichen und uneigentlichen Punkten) in zwei Strecken zerlegt. Nehmen wir z. B. noch einen beliebigen von F, G verschiedenen Punkt J auf h an (Fig. 9), so zerfallen eben alle von F, G verschiedenen Punkte von h in die beiden Klassen von Punkten, welche mit J die Punkte F, G trennen oder nicht. Wir können diese beiden Strecken jetzt auch, wie folgt, unterscheiden: Wir denken auf der Geraden h ein Abszissensystem so eingeführt, daß die Punkte F, G und J die Abszissen 0, ∞, 1 besitzen. Die Punkte der Geraden h können wir nun in solcher Reihenfolge „*durchlaufen*" (d. h. nacheinander betrachtet) denken, wie wir die Zahlenreihe der positiven Zahlen von 0 bis $+\infty$ und dann die Reihe der negativen Zahlen von $-\infty$ bis 0 „durchlaufen". Andererseits können wir aber die Punkte der Geraden h auch in der anderen Reihenfolge durchlaufen, die von 0 über -1 bis $-\infty$ und von $+\infty$ über $+1$ nach 0 zurückführt. Demgemäß können wir sagen, daß wir die Gerade h in der einen oder anderen Richtung durchlaufen. (Es würde nicht schwierig sein, diese Betrachtung auch rein geometrisch, ohne Beziehung zur Zahlenlehre durchzuführen.) Eine solche einzelne Richtung der Geraden können wir uns dann aber wieder durch eine *Pfeilspitze auf* h veranschaulichen.

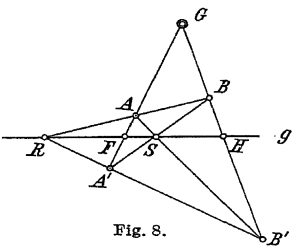


Fig. 8.

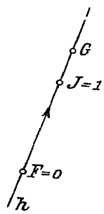


Fig. 9.

Dies führt uns zu der *Definition:*

7. Eine Gerade h mit der auf ihr angenommenen Richtung nennen wir kurz eine „g e r i c h t e t e G e r a d e".[1])

1) Man sollte besser eine Gerade nicht auch gleichwertig als Strahl bezeichnen (vgl. Pasch, a. a. O. 1926, S. 28), sondern statt „gerichtete Gerade" lieber „Strahl" sagen.

Die durch zwei Punkte F, G gegebenen Strecken einer Geraden können wir dann durch $\overrightarrow{FG}$ und $\overrightarrow{GF}$ unterscheiden, indem wir der Geraden h eine bestimmte Richtung hinzufügen.

8. Durch die Umwendung $\mathfrak{G}$ geht dann gemäß dem Satze 6 S. 8 ein beliebiger Punkt A der Strecke $\overrightarrow{FG}$ in der Fig. 8 S. 9 in einen bestimmten Punkt A' der Strecke $\overrightarrow{GF}$ über und umgekehrt, wobei also eine bestimmte Pfeilrichtung für die Gerade FG in der Figur hinzugefügt ist.

Mit unseren bisherigen Betrachtungen ist also volle logische und anschauliche Klarheit darüber geschaffen, was die Umwendung um eine Gerade g bedeutet.

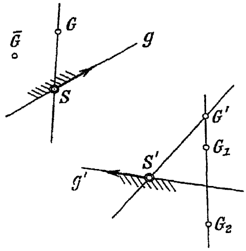


Fig. 10.

Wir wollen hinsichtlich der Zuordnung einer (eigentlichen) Geraden g und ihres absoluten Poles G vorausblickend noch die Behauptung hinzufügen:

9. Der absolute Pol G ist, wie wir später sehen werden, ein unendlich ferner, überunendlich ferner bzw. eigentlicher Punkt, je nachdem wir das parabolische, hyperbolische oder elliptische Parallelenaxiom annehmen.

Wir wollen endlich noch folgenden Satz anschließen:

10. Es seien zwei (eigentliche) Geraden g, g' und ihre absoluten Pole G, G' gegeben. Bei der Bewegung $\mathfrak{B}$, welche die Gerade g, einen Punkt S auf g mit gegebener Richtung von g und mit gegebener Seite der Umgebung von S in die Gerade g', einen Punkt S' von g' mit gegebener Richtung und Seite überführt, geht auch stets der absolute Pol G in G' über (Fig. 10).

Angenommen, es ginge durch $\mathfrak{B}$ der Punkt G nicht in G' über, sondern in einen anderen Punkt G_1. Dann führen wir noch die Umwendung $\mathfrak{G}'$ um g' aus, wodurch G_1 in einen Punkt G_2 übergehen würde, der von G_1 verschieden ist, und darauf die umgekehrte Bewegung $\mathfrak{B}' \equiv \mathfrak{B}^{-1}$ zu $\mathfrak{B}$. (Letztere führt also g' mit S' sowie dieselbe gegebene Richtung und Seite wieder nach g mit S und gegebener Richtung und Seite zurück.) Dann würde durch die Aufeinanderfolge $\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}'\mathfrak{B}^{-1}$ der Punkt G erst nach G_1, dann nach G_2, dann aber nicht nach G zurückkommen, vielmehr in einen anderen Punkt $\overline{G}$. Die Aufeinanderfolge $\mathfrak{B}\mathfrak{G}'\mathfrak{B}^{-1}$ ist aber nichts anderes als die Umwendung $\mathfrak{G}$ um g. Da bei dieser aber G unverändert bleibt, so sind wir zu einem Widerspruch geführt. Es muß also G tatsächlich in G' übergehen.

§ 5. Das Senkrechtstehen zweier Geraden aufeinander.

Wir stellen weiter folgende *Definition* auf:

1. Es steht die (eigentliche oder uneigentliche) Gerade h senkrecht zur eigentlichen Geraden g ($h \perp g$), wenn durch Umwendung um g die Gerade h in sich übergeht (Fig. 11).

Hieraus folgt sogleich nach dem Satze 5 S. 7:

2. *Die Verbindungslinien entsprechender Punkte AA', BB' usw. der Umwendung um g stehen auf g senkrecht.*

3. *Alle Senkrechten zu einer Geraden g in ihren (eigentlichen oder auch uneigentlichen) Punkten gehen durch denselben Schnittpunkt, den absoluten Pol G von g* (vgl. den Satz 4 S. 8).

Wir können hiernach die Umwendung um die Gerade g auch als *Spiegelung* der Ebene an der Geraden g bezeichnen (oder auch als halbe Umdrehung der Ebene um g).

Nun gilt es den wichtigen, keineswegs selbstverständlichen Satz zu beweisen:

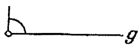


Fig. 11.

4. *Geht die eigentliche Gerade h durch die Umwendung $\mathfrak{G}$ um g in sich über, d. h. ist $h \perp g$, so steht auch $g \perp h$, d. h. auch g geht durch die Umwendung $\mathfrak{H}$ um h in sich über.*

Diesen Satz können wir auch wie folgt aussprechen:

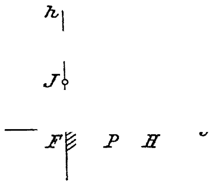


Fig. 12.

5. *Geht die Gerade h durch den absoluten Pol G von g, so geht die Gerade g durch den absoluten Pol H von h.*

Es sei der Schnittpunkt von g und h mit F bezeichnet (Fig. 12), wobei es unentschieden sei, ob F ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt ist. Wir betrachten dann die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ und nennen die „resultierende" Bewegung $\mathfrak{A}$. Es ist also symbolisch

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}.$$

Durch Wiederholung der Bewegung $\mathfrak{A}$ muß aber die Identität erzeugt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{A}^2 \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{G}\mathfrak{H}\mathfrak{G}\mathfrak{H} \equiv 1.$$

Denn: Durch $\mathfrak{G}$ geht h in sich über, doch die Richtungen der Geraden h von F aus vertauschen sich. Durch $\mathfrak{H}$ geht auch h in sich über, ohne daß sich die Richtungen wieder vertauschen. Nach nochmaliger Ausführung von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist also durch die Bewegung $\mathfrak{A}^2$ die Gerade h nebst ihren Richtungen von F aus in sich übergegangen. Auch die eine Seite von h in der Umgebung von F ist durch $\mathfrak{A}^2$ in sich übergegangen. Also muß die Bewegung $\mathfrak{A}^2$ nach dem Satze 4 S. 5 die *Identität* sein.

Wir erkennen weiter nun leicht: *Bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ bleiben von den (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkten der Geraden h nur die Punkte F, G unverändert.* Denn dies ist auch bei der Bewegung $\mathfrak{G}$ der Fall, während die Bewegung $\mathfrak{H}$ die Punkte von h ja alle unverändert läßt.

Es sei nun P ein beliebiger (eigentlicher), von F, H verschiedener Punkt von g (vielleicht auch im begrenzten Gebiet gelegen, wenn wir ein solches annehmen) (Fig. 12). Dieser Punkt P bleibt bei der Bewegung $\mathfrak{G}$ unverändert und geht durch die Bewegung $\mathfrak{H}$ in einen von P verschiedenen Punkt P' über, d. h. der Punkt P geht durch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}$ in P' über. Da durch Wiederholung von $\mathfrak{A}$ die Identität entstehen muß, so geht durch $\mathfrak{A}$ auch P' in P über, d. h. die Gerade PP' entspricht sich bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ selbst.

Es entspricht sich also bei $\mathfrak{A}$ auch der Schnittpunkt von PP' mit h selbst, da ja auch h sich selbst entspricht. Es muß folglich die Gerade PP' entweder durch F oder G gehen, da F, G, wie wir sahen, die einzigen sich selbst entsprechenden Punkte von h sind. Daß PP' durch G geht, ist jedoch ausgeschlossen; denn dann würde die Gerade PP' bei $\mathfrak{G}$ unverändert bleiben, müßte also auch bei $\mathfrak{H}$ allein ebenfalls unverändert bleiben, d. h. (nach dem Satze 4 S. 8) durch den absoluten Pol H von h gehen, d. h. es müßte PP' die Gerade GH selbst sein. Da aber der willkürlich auf g gewählte Punkt P nicht auf GH liegt, so ist dies ausgeschlossen. Also muß die Gerade PP' durch F gehen und damit mit der Geraden g identisch sein, d. h.:

Durch die Umwendung $\mathfrak{H}$ geht die Gerade g in sich über, oder:

Der absolute Pol H von h liegt auf g. Hiermit ist aber der Satz 5 bewiesen. Wir stellen nun weiter die *Definition* auf:

6. *Zwei eigentliche Geraden g, h sind* k o n j u g i e r t e a b s o l u t e P o l a r e n, *wenn der absolute Pol der einen Geraden auf der anderen liegt.*

§ 6. Die Umwendung um einen eigentlichen Punkt F.

Wir wollen uns nun die Bewegung $\mathfrak{A}$, die durch $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{H}$ gegeben wird, wo $g \perp h$ ist und g, h eigentliche Geraden mit dem *eigentlichen Schnittpunkt* F seien, noch etwas näher ansehen. Wir erkennen zunächst:

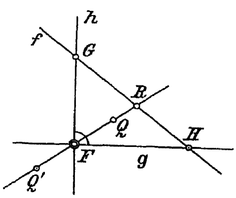


Fig. 13.

1. *Durch die Bewegung $\mathfrak{A}$ gehen die Punkte F, G, H in sich über, ebenso die Geraden f, g, h, wo f die Verbindungslinie der absoluten Pole G, H sei* (Fig. 13).

Es sei nun Q ein beliebiger, nicht auf f, g oder h gelegener Punkt der Ebene. Er möge durch die Bewegung $\mathfrak{A}$ in den Punkt Q' übergehen. (Der Punkt Q' muß notwendig von Q verschieden sein, da sonst die vier Punkte F, G, H und Q unverändert blieben, also $\mathfrak{A}$ nach dem Satze 7 S. 6 die Identität sein müßte, was nicht möglich ist.) Da $\mathfrak{A}^2 \equiv 1$ ist, so muß durch die Bewegung $\mathfrak{A}$ auch der Punkt Q' in Q, also die Gerade QQ' in sich übergehen. Es muß also auch der Schnittpunkt von QQ' und g wie der Schnittpunkt von QQ' und h unver-

ändert bleiben. Es kann nun QQ' nicht durch G gehen, da sonst QQ' schon bei $\mathfrak{G}$ unverändert bliebe und dann, da QQ' nicht auch durch H geht, bei $\mathfrak{H}$ und damit auch bei $\mathfrak{A}$ nicht unverändert bleiben könnte. Analog sieht man, daß QQ' auch nicht durch H gehen kann. Wir behaupten dann: *Also muß QQ' notwendig durch den Schnittpunkt F von g, h hindurchgehen.* Denn wäre z. B. S im anderen Falle der Schnittpunkt von g mit QQ', so würde ja durch $\mathfrak{G}$ der Punkt S unverändert bleiben, durch $\mathfrak{H}$ aber nicht, also könnte der Schnittpunkt S von g und QQ' auch nicht bei $\mathfrak{A}$ unverändert sein, was doch sein müßte. Wir gewinnen somit den Satz:

Bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ geht jede durch F gehende Gerade QQ' in sich selbst über.

Es schneide nun die Gerade QQ' die Gerade f im Punkte R. Dann muß auch R sich selbst entsprechen, d. h.:

2. Bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ entspricht jeder Punkt von f sich selbst.

3. Die Bewegung $\mathfrak{A}$ ist also nach den Entwicklungen des § 5 Bd. I eine spezielle Zentralkollineation der projektiven Ebene. Der eigentliche Punkt F ist das Zentrum und GH die Achse der Zentralkollineation.

Es ist natürlich hier noch unentschieden, ob die Kollineationsachse f eine eigentliche, eine unendlich ferne oder eine überunendlich ferne Gerade ist, ferner auch, ob verschiedene Punkte F stets verschiedene zugeordnete Achsen f haben oder nicht. Da $\mathfrak{A}^2 \equiv 1$ ist, so gilt ferner:

4. Die Bewegung $\mathfrak{A}$ ist auch eine wechselseitige oder involutorische Zentralkollineation.

Und hieraus folgt weiter:

5. Bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ liegen je zwei entsprechende Punkte Q, Q' stets zu dem Zentrum F und dem Schnittpunkt R der Verbindungslinie QQ' mit der Achse der Zentralkollineation harmonisch.

6. Bei der Bewegung $\mathfrak{A}$ bleiben also außer dem Zentrum F nur noch die Punkte der Kollineationsachse unverändert und außer der Geraden f nur die Geraden durch F.

Wir sehen auch leicht, daß durch die Bewegung $\mathfrak{A}$ bei einer beliebigen Geraden QQ' durch F die Richtungen dieser Geraden von F aus und die Seiten dieser Geraden in der Umgebung von F sich vertauschen.

7. Die Bewegung $\mathfrak{A}$ ist bereits dadurch festgelegt (nach dem Axiom 2 S. 3), daß irgendeine gegebene Gerade durch das Zentrum F in sich übergeht, auch F sich selbst entspricht, jedoch die eine Richtung der Geraden von F aus in die entgegengesetzte übergeht und auch die eine Seite der Geraden in der Umgebung von F in die entgegengesetzte.

Nunmehr stellen wir die *Definition* auf:

8. Wir nennen die hiermit wohlbestimmte Bewegung $\mathfrak{A}$ die Umwendung um den eigentlichen Punkt F (oder auch wohl die *halbe Umdrehung um den Punkt F* oder die *Spiegelung an dem Punkte F*). *Diese Bewegung ist allein durch die Angabe des Punktes F bereits bestimmt.*

Wir haben somit auch den Satz gewonnen:

9. Die Aufeinanderfolge der Umwendungen um irgend zwei durch den Punkt F gehende Senkrechte ist stets gleichwertig mit der Umwendung um F.

Es folgt auch sogleich:

10. Jede durch F gehende Gerade hat ihren absoluten Pol auf der Kollineationsachse f der die Umwendung um F darstellenden Zentralkollineation.

Diese Gerade *f* ist also der geometrische Ort der absoluten Pole aller durch den eigentlichen Punkt *F* gehenden Geraden.

11. Wir nennen die Gerade f wieder die absolute Polare des absoluten Poles F, der ja als ein eigentlicher Punkt vorausgesetzt ist.

Zusammenfassend können wir also sagen:

11a. Zu jeder eigentlichen Geraden g gehört ein bestimmter (eigentlicher oder uneigentlicher) Punkt als absoluter Pol.

11b. Zu jedem eigentlichen Punkte F gehört eine bestimmte (eigentliche oder uneigentliche) Gerade f als absolute Polare.

§ 7. Betrachtungen über den Begriff „Winkel", insbesondere der rechte Winkel.

Wir wollen nunmehr dazu übergehen, endlich auch den Begriff des „*Winkels*" einzuführen. Eine Definition wie: „Ein Winkel ist der Richtungsunterschied zweier Geraden" können wir natürlich nicht gebrauchen, da ja der Begriff „Richtungsunterschied" dabei gar nicht klar definiert ist. Dieser Begriff steht dem Begriff der Strecke in gewissem Sinne dual gegenüber. Wir können ja die Strecke auffassen als den Inbegriff aller Punkte des einen oder des anderen der Teile einer Geraden *s*, in welche diese Gerade oder die durch sie gegebene Punktreihe durch zwei Punkte *G, H* auf ihr zerfällt. Hierbei brauchen wir uns nicht die Beschränkung aufzuerlegen, daß der Inbegriff solcher Punkte etwa nur aus eigentlichen Punkten besteht. Dementsprechend können wir den Winkel auffassen als den Inbegriff aller Strahlen des einen oder des anderen Teiles eines Strahlenbüschels mit dem Träger *S*, in welche dieses durch zwei der Strahlen *g, h* zerfällt. Auch hier brauchen wir uns keinerlei Beschränkung auf eigentliche Elemente aufzuerlegen. Doch hat sich für die Geometrie selbst wie für ihre praktischen Anwendungen eine andere Festlegung des Begriffs „Winkel" als zweckmäßiger erwiesen. Wir gehen aus von der Figur zweier von

einem Punkt S ausgehender *gerichteter* Geraden (Fig. 14, vgl. die Definition 7 S. 9) und stellen die neue *Definition* auf:

1. Durchlaufen wir eine gegebene Gerade, z. B. die Gerade g in der Fig. 14, von einem gegebenen Punkte S aus in gegebener Richtung bis zu einem beliebigen anderen Punkte hin, so wollen wir die Gerade g mitsamt der Eigenschaft dieser Durchlaufung eine von S ausgehende Strahlenrichtung nennen.

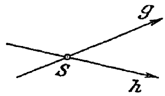


Fig. 14.

Es sei nun im folgenden der Punkt S als ein *eigentlicher* Punkt vorausgesetzt, womit wir also wieder engste Beziehung zu der späteren Einführung eines bestimmten Parallelenaxioms nehmen. Wir können dann den Punkt S auch in einem angenommenen begrenzten Gebiet, etwa wie früher einem Dreiecksgebiet, gelegen denken. Ferner seien G_1, H_1 die (ersten) Schnittpunkte zweier von S ausgehenden Strahlenrichtungen der Geraden g, h mit der Begrenzung, während G_2, H_2 die anderen Schnittpunkte der Geraden g, h mit der Begrenzung seien (Fig. 15). Die beiden Strahlenrichtungen können wir dann durch die gerichteten Strecken $\overrightarrow{SG_1}$ und $\overrightarrow{SH_1}$ festlegen. Die Geraden g, h seien zunächst voneinander verschieden. Bei allen übrigen durch S gehenden gerichteten Geraden können wir dann die zugehörige *von S ausgehende Strahlenrichtung* durch die Strecke $\overrightarrow{SP_i}$ darstellen, wo P_i der jeweilige auf der Begrenzung des Bereiches liegende (erste) Schnittpunkt der Strahlenrichtungen ist (vgl. die Strecken $\overrightarrow{SP_1}$ und $\overrightarrow{SP_2}$ der Fig. 15). Die durch diese Strecken $\overrightarrow{SP_i}$ dargestellten Strahlenrichtungen zerfallen dann in zwei Teile oder Klassen, je nachdem nämlich die dem begrenzten Gebiet angehörende Strecke G_1H_1 von der einzelnen Strahlenrichtung geschnitten wird oder nicht. Wir gewinnen somit folgende *Definitionen*, die natürlich von dem bestimmten ausgewählten begrenzten Gebiet unabhängig sind:

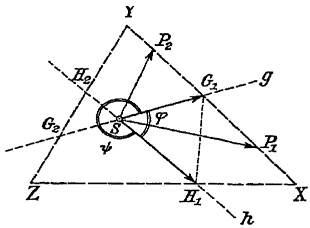


Fig. 15.

2. Den Inbegriff der ersten Klasse dieser Strahlenrichtungen $\overrightarrow{SP_i}$ wollen wir den konkaven Winkel $G_1\widehat{S}H_1 = \varphi$, den Inbegriff der zweiten Klasse den konvexen Winkel $G_1\widehat{S}H_1 = \psi$ nennen.[1] *Ferner seien der Punkt S der Scheitel, die Strahlenrichtungen $\overrightarrow{SG_1}$ und $\overrightarrow{SH_1}$ als Schenkel des Winkels bezeichnet.*

3. Ändern wir die Richtung einer der Geraden, z. B. von g, so soll der neue

1) Vgl. deswegen auch z. B. D. Hilbert, a. a. O. 1930, S. 13ff., sowie F. Schur, a. a. O. S. 79. Den Begriff „Halbstrahl" oder „Halbgerade" können wir besser erst sehr viel später definieren, wenn ein bestimmtes Parallelenaxiom vorliegt.

konkave Winkel ein Nebenwinkel des ursprünglichen konkaven Winkels heißen. Ein konkaver Winkel hat also zwei Nebenwinkel φ_1 und φ_2.

4. Ändern wir die Richtungen beider Geraden g, h, so soll der neue konkave Winkel der Scheitelwinkel φ' des ursprünglichen konkaven Winkels heißen.

Wenn aber die Geraden g, h zusammenfallen, so können ja noch ihre Richtungen gleich oder entgegengesetzt sein, d. h. es kann noch $G_1 = H_1$ und $G_2 = H_2$ oder $G_1 = H_2$ und $G_2 = H_1$ sein (Fig. 16a, b). Also gewinnen wir folgende Ergänzung der Definition 2:

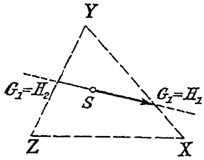


Fig. 16a.

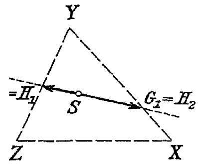


Fig. 16b.

5. Im ersten Falle wollen wir analog von einem Nullwinkel und einem Vollwinkel, im letzten Falle von einem Paar gestreckter Winkel sprechen.

Im Anschluß an den Satz 4 S. 11 stellen wir endlich noch folgende *Definition* auf:

6. Ein konkaver Winkel ist insbesondere ein rechter Winkel, wenn er durch Umwendung um den einen oder anderen Schenkel in seinen einen oder anderen Nebenwinkel übergeht.

Zwei aufeinander senkrechte Geraden bilden also vier rechte Winkel miteinander.

Wir schließen endlich noch die folgende *Definition* an:

7. Ein konkaver Winkel, der kleiner bzw. größer als ein rechter Winkel ist, heißt ein spitzer bzw. ein stumpfer Winkel.

Weiter wollen wir auf die Betrachtung der Winkel hier nicht eingehen. Natürlich wird später für uns die Bestimmung der *Größe eines Winkels* ebenso wie die der *Länge einer Strecke* einen wichtigen Teil unserer Entwicklung der nichteuklidischen Geometrien bilden.

Es mag interessant sein, kurz noch einen Blick darauf zu werfen, wie nun alle diese Winkeldefinitionen sich ihrerseits dual auf eine Punktreihe übertragen. Einer gerichteten Geraden entspricht dual ein Punkt mit einem Umlaufungssinn, der ja ebenfalls zwei verschiedene Möglichkeiten zuläßt. Ist nun ein Punkt G einer Geraden s gegeben, so können wir dem Begriff der Strahlenrichtung dual entsprechend den Begriff der „Punktumlaufung" als den Inbegriff des Punktes G mit seinem, etwa von s ausgehenden, Umlaufungssinn gegenüberstellen (Fig. 17a, b). Und sind dann zwei Punkte G, H der Geraden s gegeben, so haben wir ersichtlich auch vier Möglichkeiten, die

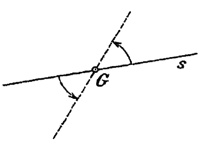


Fig. 17a.

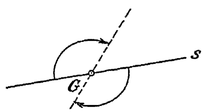


Fig. 17b.

Punktumlaufungen für G und H zusammenzustellen. Es ist nun einfach, die Winkeldefinitionen dual zu übertragen. Diese Übertragungen, die keine Anwendungen finden, im einzelnen sich klar zu machen, sei dem Leser überlassen. In der Fig. 18 z. B. ist auf Grund der angegebenen Punktumlaufungen als „konkave" bzw. „konvexe" Strecke der Inbegriff aller Punktumlaufungen zu verstehen, die von der Punktumlaufung G bis zu der von H hinführen, also der stark ausgezogene Teil der Geraden, wenn wir die Gerade s von G aus in der Richtung der auf ihr hinzugefügten Pfeilspitze durchlaufen, bzw. die ganze Gerade s und der nicht stark ausgezogene Teil, wenn wir von G aus in der entgegengesetzten Richtung die Gerade s durchlaufen. Hier kommen also die Betrachtungen des § 33 Bd. I über die Eigenschaft der projektiven Ebene, eine einseitige Fläche zu sein, zur Geltung.

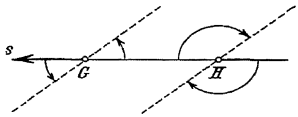


Fig. 18.

§ 8. Die Kongruenzlehre.

Wir wollen uns bei der Betrachtung der Kongruenzlehre möglichst kurz fassen, da diese Verhältnisse ja leicht, schon wegen ihrer Kenntnis aus der euklidischen Geometrie, zu überblicken sind.

An die Spitze stellen wir folgende *Definition*:

1. Zwei Strecken bzw. zwei Winkel sollen gleich oder kongruent heißen, wenn durch eine Bewegung die eine Strecke bzw. der eine Winkel in die andere Strecke bzw. den anderen Winkel übergeführt werden kann.

Wir werden bei diesem Satze wie auch im folgenden bei dem Begriff einer Strecke nur an eine Strecke mit nur eigentlichen Punkten und bei dem Begriff eines Winkels nur an einen Winkel mit einem eigentlichen Scheitelpunkt denken. Hiermit aber treten wir erneut in engste Fühlung mit der Einführung eines bestimmten Parallelenaxioms. Vor allem aber wollen wir in dieser Hinsicht hervorheben, daß hier wie auch in der folgenden Betrachtung dieses Paragraphen stillschweigend der wichtige Satz vorausgesetzt wird:

Durch jede Bewegung geht jeder eigentliche Punkt wieder in einen eigentlichen Punkt über, ferner jeder unendlich ferne Punkt bzw. jeder überunendlich ferne Punkt ebenfalls wieder in einen solchen, wenn es solche Punkte überhaupt gibt.

Der Beweis dieses Satzes wird für die hyperbolische Geometrie insbesondere durch die Betrachtungen des § 13 gegeben.

Es gelten sofort auch die Sätze:

2. Sind zwei Strecken s, s' (oder zwei Winkel α, α') einer dritten Strecke s'' (oder einem dritten Winkel α'') gleich, so sind sie untereinander gleich (Fig. 19 und 20).

Dieser Satz folgt ja einfach aus der Gruppeneigenschaft der Bewegungen.

3. Jede Strecke (bzw. jeder Winkel) ist sich selbst gleich.

4. Je zwei Scheitelwinkel φ, φ' sind einander gleich (Fig. 21; vgl. die Einführung der Bewegung $\mathfrak{A}$ im Satze 8 S. 14).

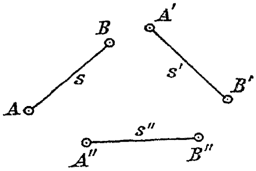


Fig. 19.

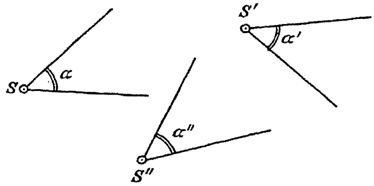


Fig. 20.

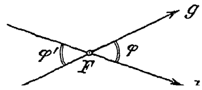


Fig. 21.

5. Ein rechter Winkel ist jedem seiner Nebenwinkel gleich (vgl. den Satz 6 S. 16).

6. Alle rechten Winkel sind einander gleich (vgl. den Satz 10 S. 10).[1])

Weiter stellen wir die *Definition* auf:

7. Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (mit eigentlichen Ecken) sollen kongruent heißen, wenn in ihnen entsprechende Seiten und Winkel einander gleich sind.

Es folgt dann auch die Gültigkeit der Kongruenzsätze:

8. Kongruenzsatz I: *Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, so sind auch die übrigen Stücke gleich, d. h. die Dreiecke sind kongruent.*

9. Kongruenzsatz II: *Sind in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich, so sind die Dreiecke kongruent.*

10. Kongruenzsatz III: *Sind in zwei Dreiecken die drei Seiten einander gleich, so sind die Dreiecke kongruent.*

Auf die Beweise der Kongruenzsätze I und II brauchen wir nicht einzugehen. Was den Beweis des Kongruenzsatzes III betrifft, so folgt zunächst der Satz:

11. In einem gleichschenkligen Dreieck ABC sind die Basiswinkel α, β einander gleich (Fig. 22).[2])

---

1) Euklid hat diesen Satz als Axiom aufgestellt. Vgl. dazu Hilbert, a. a. O. 1930, S. 23, Satz 21, woselbst auch auf weitere Literatur hingewiesen wird. Wir nennen noch: M. Simon, Euklid und die sechs planimetrischen Bücher, Leipzig 1901, S. 30 und T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements, Vol. I, 2. Aufl., Cambridge 1926, S. 154 und S. 200, sowie Fr. Schilling, Kongruenz und Bewegung, Math. Ann. Bd. 93, 1924, S. 41.

2) Vgl. auch die interessante Untersuchung von Hilbert, a. a. O. 1930, S. 132—158: Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck. Die dort erwähnte engere Fassung III, 5* des Kongruenzaxioms kommt bei unseren Axiomen der Bewegung darauf hinaus, daß wir in der euklidischen (oder auch der hyperbolischen) Geometrie der Ebene nur gleichsinnige Bewegungen bei unserem Eindeutigkeitsaxiom der Bewegung (S. 3) zulassen.

Denn es ist ja nach dem Kongruenzsatz I $\triangle ABC \cong \triangle BAC$.

Auch gilt der umgekehrte Satz:

12. Sind zwei Winkel α, β eines Dreiecks ABC einander gleich, so sind auch die gegenüberliegenden Seiten gleich. Wieder ist dann $\triangle ABC \cong \triangle BAC$, jetzt nach dem Kongruenzsatz II (Fig. 22).

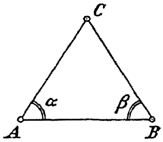


Fig. 22.

Sind nun in den zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die drei Seiten einander entsprechend gleich, so führen wir das Dreieck $A'B'C'$ durch entsprechende Bewegung in das neue Dreieck ABC_1 über, wo die Seite AC_1 in der Umgebung von A auf der anderen Seite von AB gelegen sei. Es kann nun eintreten, daß die Punkte C und C_1 zusammenfallen (Fig. 23a). Dann sind aber ersichtlich die Winkel γ und γ_1 der Dreiecke ABC und ABC_1, die hier wie in den folgenden Figuren durch Schraffieren hervorgehoben sind, auch einander gleich, so daß also die ursprünglichen beiden Dreiecke kongruent sind.

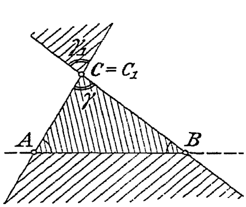


Fig. 23a.

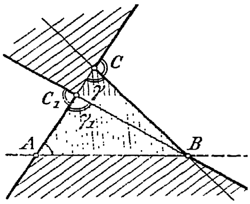


Fig. 23b.

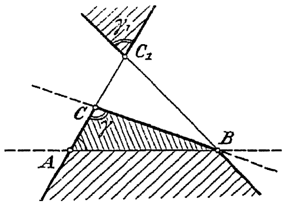


Fig. 23c.

Ferner kann die Ecke C_1 auf der Geraden AC, doch *außerhalb* der Seite AC liegen (Fig. 23b). Dann sind aber in dem gleichschenkligen Dreieck BCC_1, dessen Seiten BC und BC_1 mit den entsprechenden Seiten der Dreiecke ABC und ABC_1 übereinstimmen und das in der Figur durch stärkere Seiten herausgehoben ist, die Basiswinkel γ und γ_1 einander gleich. Es kann aber auch die Ecke C_1 auf der Geraden AC, doch *innerhalb* der Seite AC liegen (Fig. 23c). Dann folgt wieder aus der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck BCC_1 auch die Gleichheit der Winkel γ und γ_1. In analoger Weise ergibt sich für jede beliebige andere mögliche Lage des Punktes C_1 stets die Gleichheit der Winkel γ und γ_1. Es mag genügen, noch den allgemeinen Fall zu behandeln, daß die Ecke C_1 innerhalb des gegebenen Dreiecks ABC gelegen ist (Fig. 24). Dann folgt aus der Gleichheit der Basiswinkel in den gleich-

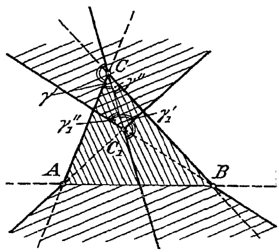


Fig. 24.

schenkligen Dreiecken ACC_1 und BCC_1, daß auch die Nebenwinkel der Basiswinkel $\sphericalangle\gamma' = \sphericalangle\gamma_1'$, $\sphericalangle\gamma'' = \sphericalangle\gamma_1''$ sind und also auch $\sphericalangle\gamma = \sphericalangle\gamma_1$ ist.

Wir stellen nun weiter folgende Sätze auf:

13. Jede (eigentliche) Strecke AB hat einen „Mittelpunkt" M, d. h. es gibt einen Punkt M innerhalb AB, so daß $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ ist (Fig. 25).

14. Für jeden konkaven (oder konvexen) Winkel gibt es eine Gerade w durch den (eigentlichen) Scheitelpunkt, so daß der Winkel in zwei gleiche Teile zerfällt; diese Gerade w nennen wir die Winkelhalbierende (Fig. 26).

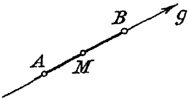


Fig. 25.

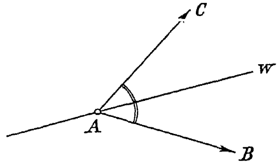


Fig. 26.

Der *Beweis des Satzes 13* ist wie folgt zu führen (im begrenzten Gebiet): Über AB errichten wir ein *beliebiges* Dreieck ABC, indem wir einen beliebigen Punkt C mit A, B verbinden (Fig. 27) und legen dieses durch die entsprechende Bewegung so um, daß die Seite AB auf BA fällt und das neue Dreieck ABC' auf derselben Seite von AB liegt wie das alte. Wegen der Gleichheit der Winkel α, β an den Ecken A, B müssen die Seiten AC' und BC sich gegenseitig innerlich in einem Punkte E schneiden. Denn ist etwa $\sphericalangle\alpha > \sphericalangle\beta$, so kann C' nicht auf der Strecke AE liegen, da sonst $\sphericalangle A\widehat{B}C' < \sphericalangle A\widehat{B}C$ wäre. Nun geht natürlich auch die ganze Figur in sich über durch die soeben genannte Bewegung. Folglich ist $AE = BE$. Wir

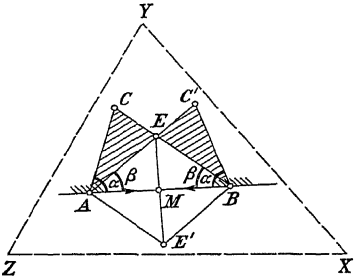


Fig. 27.

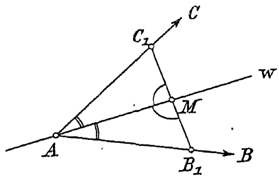


Fig. 28.

nun das gleichschenklige Dreieck ABE um AB nach ABE' um. Dann sind auch die Dreiecke AEE' und BEE' kongruent, d. h. es ist $\sphericalangle A\widehat{E}E' = \sphericalangle B\widehat{E}E'$. Dann sind auch die Dreiecke AME und BME kongruent, d. h. es ist $AM = MB$.[1])

Zum *Beweise des Satzes 14* denken wir auf den Schenkeln $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ vom Scheitel A aus gleiche Strecken AB_1 und AC_1 abgetragen (Fig. 28). Es sei ferner M die Mitte von B_1C_1. Dann ist das Dreieck B_1AM kongruent dem Dreieck C_1AM; also ist $\sphericalangle B_1\widehat{A}M = \sphericalangle C_1\widehat{A}M$.

1) Vgl. auch z. B. Pasch, a. a. O. 1926, S. 106.

Wir können jetzt von unseren beiden Sätzen der Kongruenzlehre sogleich noch eine Anwendung auf die Theorie der Bewegungen machen, indem wir folgenden Satz damit beweisen wollen:

15. Jede allgemeine (d. h. von der Identität und der Umwendung um eine Gerade verschiedene) Bewegung, wie sie dem Axiom 2 S. 3 gemäß gegeben ist, läßt sich in einem hinzugewählten begrenzten Gebiet stets durch die Aufeinanderfolge von zwei bzw. drei Umwendungen erzeugen, je nachdem die Bewegung eine gleichsinnige oder ungleichsinnige ist.

Es sei z. B. in der Fig. 29 die (in dem begrenzten Gebiet ungleichsinnige) Bewegung durch g, g', S, S' und die entsprechenden Richtungen und Seiten von g, g' festgelegt. Wir können stets S und S' als voneinander verschieden annehmen. Dann sei weiter M die Mitte von SS' und m die Senkrechte in M auf SS'. Durch die Umwendung um m geht dann S in S' über und g in die neue Gerade g'' mit entsprechender Richtung und Seite. Ist dann g'' und die entsprechende Richtung und Seite nicht schon mit g' und der entsprechenden Richtung und Seite identisch, so sei ferner w die Winkelhalbierende des konkaven Winkels der gerichteten Geraden g', g''. Dann geht durch die Umwendung um w noch g'' in g' über. Endlich ist noch die Umwendung um die Gerade g' notwendig, um nun auch die gegebene Seite von g in ihre Endlage, die gegebene Seite von g', überzuführen.

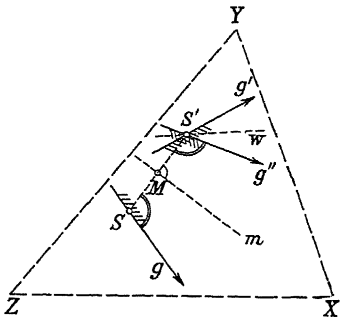


Fig. 29.

Als Folgerung des Satzes 15 ergibt sich dann weiter sogleich der Satz:

16. Bei einer gleichsinnigen Bewegung bleibt stets wenigstens ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt der Ebene unverändert (nämlich der Schnittpunkt der Geraden m und w in der Fig. 29).

Wir können endlich noch folgenden Kongruenzsatz hinzufügen:

17. Zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind kongruent, wenn sie in den „Hypotenusen" AB und $A'B'$ und den ihnen anliegenden Winkeln α und α' übereinstimmen, falls die Winkel α und α' nicht rechte Winkel sind.

Zweiter Abschnitt.

Das Parallelenaxiom und das absolute Polarsystem, sowie der absolute Kegelschnitt in der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Geometrie.

§ 9. Die Bewegungen in ihrer allgemeinen Beziehung zum Parallelenaxiom.

Wir stehen jetzt endlich am Eingangstore zur nichteuklidischen Geometrie. Wenn es sich öffnet und wir hineingehen, können wir aber nicht erwarten, sogleich kostbare Paläste in märchenhafter Schönheit und Pracht zu erblicken. Die wunderbaren Kostbarkeiten sind vielmehr in Truhen verschlossen, deren Öffnung wir uns durch weitere Arbeit erringen müssen.[1])

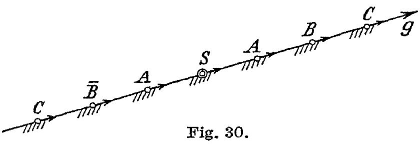


Fig. 30.

Unsere bisherigen Untersuchungen sind ja soweit fortgeschritten, daß wir jetzt geradezu zur *Einführung eines bestimmten Parallelenaxioms* gedrängt werden. Wir wollen an die Axiome der Bewegung hierbei anknüpfen. Es sei eine beliebige eigentliche Gerade g mit dem Punkt S auf ihr und mit bestimmter Richtung und Seite in der Umgebung von S gegeben (Fig. 30). Es sei dann in der gegebenen Richtung die Strecke $\overrightarrow{SA}$ auf g gegeben, welche wir als

1) Als besondere Buchliteratur über nichteuklidische Geometrie sei genannt vor allem: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, deren Vorläufer, die von mir ausgearbeiteten autographierten Vorlesungshefte, 2. Aufl., Göttingen 1893, sind, sodann: H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1923, R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1927, I. L. Coolidge, The element of non-euclidean geometry, 2. Edition, London 1927, L. Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie Bd. III, Nichteuklidische Geometrie der Ebene und des Raumes, Karlsruhe 1929, H. Mohrmann, Einführung in die nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1930, M. Simon, Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung, 10. Beiheft zur Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Leipzig 1925. Einen geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie gibt das vortreffliche Werk: R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1921, sowie der Anhang in dem oft von uns genannten Werk von M. Pasch: M. Dehn, Die Grundlegung der Geometrie in historischer Entwicklung, Berlin 1926 und H. J. E. Beth, Inleiding in de niet-euclidische meetkunde op historischen grondslag, Groningen 1929. Über die ältere Literatur orientiert sehr gut das Werk: Duncan Sommerville, Bibliography of non-euclidean geometry, including the theorie of parallels, the foundations of geometry and space of n dimensiones, London 1911 (403 Seiten, nur aus Zitaten bestehend).

„*Einheitsstrecke*" bezeichnen wollen. Wir denken nun diejenige Bewegung 𝔖 ausgeführt, welche die Gerade g in sich überführt, den Punkt S nach A, sowie die Richtung und Seite in der Umgebung von S in die entsprechende Richtung und Seite für A, die sich aus der Richtung und Seite für S beim Durchlaufen der Geraden g von S bis A in der gegebenen Richtung von S aus ergeben. Dann geht die Strecke $\overrightarrow{SA}$ in die neue Strecke $\overrightarrow{AB}$ über (vgl. die Definition 1 S. 17). Wir wollen kurz sagen: *Es ist die Strecke* $\overrightarrow{SA}$ *von* A *aus in der gegebenen Richtung bis* B *abgetragen.* Analog tragen wir (durch dieselbe Bewegung) die Strecke $\overrightarrow{AB}$ über B hinaus bis C, die Strecke $\overrightarrow{BC}$ über C hinaus bis D und so fort ab. Ebenso bestimmen wir die Punkte $\ldots \bar{C}, \bar{B}, \bar{A}$ auf g so, daß die Strecke $\overrightarrow{\bar{A}S} = \overrightarrow{SA}$ ist (d. h. daß durch die genannte Bewegung 𝔖 die Strecke $\overrightarrow{\bar{A}S}$ in die Strecke $\overrightarrow{SA}$ übergeht oder auch die Strecke $\overrightarrow{SA}$ in *entgegengesetzter* Richtung von S aus bis $\bar{A}$ abgetragen ist), daß ferner die Strecke $\overrightarrow{\bar{B}\bar{A}} = \overrightarrow{\bar{A}S}$, die Strecke $\overrightarrow{\bar{C}\bar{B}} = \overrightarrow{\bar{B}\bar{A}}$ und so fort ist. Wir können weiter auch sagen: Die Strecken $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC} \ldots$ haben bzw. die Längen 1, 2, 3 . . ., ebenso die Strecken AB, AC, $AD \ldots$ die Längen 1, 2, 3 . . . und so fort.

Bei diesem wiederholten Abtragen der Einheitsstrecke $\overrightarrow{SA}$ nach beiden Richtungen hin können nun nur die folgenden drei Möglichkeiten eintreten:

1. Entweder hat die Reihe der Punkte $S, A, B, C \ldots$, *die in der ausgezeichneten Richtung der Geraden* g *auf einander folgen, und die Reihe der Punkte* $S, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \ldots$, *die in der entgegengesetzten Richtung aufeinander folgen, denselben Grenzpunkt* U *oder die beiden Reihen haben verschiedene Grenzpunkte* U, V *oder endlich jede der beiden Reihen hat überhaupt keinen Grenzpunkt.* Ersichtlich ist der Fall unmöglich, daß eine der beiden Punktreihen einen Grenzpunkt hat, die andere aber nicht. Denn durch die Umwendung um den Punkt S (vgl. die Betrachtungen des § 6, S. 12) gehen ja die beiden Punktreihen offenbar ineinander über. Aus dieser letzten Bemerkung folgt auch:

2. Durch die Umwendung um S *geht der evtl. vorhandene einzige Grenzpunkt* U *in sich über bzw. der Grenzpunkt* U *in den Grenzpunkt* V *und umgekehrt.*

Wir erkennen auch, daß hier natürlich wieder das Stetigkeitsaxiom von Dedekind oder Weierstraß Anwendung findet. Denn z. B. bei der Reihe der Punkte $S, A, B, C \ldots$ können ersichtlich nur die beiden Möglichkeiten vorliegen, daß entweder ein Punkt P auf g vorhanden ist, der keiner der Strecken $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ und so fort angehört, oder daß dies nicht der Fall ist. Im ersten Falle muß dann nach dem Stetigkeitsaxiom (vgl. z. B. die Anm. 2 Bd. I, S. 76) ein bestimmter Grenzpunkt U (in projektivem Sinn) existieren. Im zweiten Fall

muß dagegen die Reihe der Punkte $S, A, B, C \ldots$ bei genügender Fortsetzung wieder über den Punkt S hinübergreifen und kann dann auch bei weiterer Fortsetzung keinen Grenzpunkt haben. Wir wollen jedoch noch nachweisen: *Wenn zwei verschiedene Grenzpunkte U, V vorhanden sind, kann der Punkt V nicht auf der Strecke $\overrightarrow{SU}$ gelegen sein* (Fig. 31). Denn wäre dann T ein Punkt der Strecke $\overrightarrow{VU}$, so müßte die Strecke $\overrightarrow{VT}$ bereits beliebig viele Einheitsstrecken enthalten, was unmöglich ist, da sogar die Strecke $\overrightarrow{ST}$ nur eine angebbar endliche Zahl von Einheitsstrecken enthält. Im Falle, daß zwei Grenzpunkte U, V vorhanden sind, können wir also die Strecken $\overrightarrow{VU}$ und $\overrightarrow{UV}$ so unterscheiden, daß auf der Strecke $\overrightarrow{UV}$ keiner der Punkte $\ldots \bar{C}, \bar{B}, \bar{A}, S, A, B, C \ldots$ gelegen ist, andererseits auf der Strecke $\overrightarrow{VU}$ in jeder beliebigen Nähe der Endpunkte U und V noch immer Punkte der genannten Reihe liegen (Fig. 32).

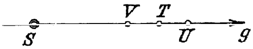


Fig. 31.



Fig. 32.

Nach dem Vorstehenden sind wir jetzt berechtigt, das einzuführende Parallelenaxiom in der folgenden Form aufzustellen, indem wir nunmehr die so evtl. erhaltenen Grenzpunkte als *unendlich ferne* Punkte bezeichnen und demgemäß auch gelegentlich bzw. als U^∞, V^∞ benennen:

3. Parallelenaxiom: *Es soll eine der folgenden Aussagen gelten: Auf einer bestimmten (eigentlichen) Geraden g gibt es entweder nur einen unendlich fernen Punkt U^∞ oder zwei unendlich ferne Punkte U^∞, V^∞ oder keinen unendlich fernen Punkt (parabolische (euklidische) Geometrie bzw. hyperbolische oder elliptische Geometrie).*

Wir haben also das Parallelenaxiom nicht bereits als für *alle* Geraden, sondern nur als für eine einzige Gerade gültig ausgesprochen.

Es ist nun sehr einfach, auf Grund der Bewegungsaxiome die nachfolgenden Sätze zu beweisen:

4. Wird auf der bestimmten Geraden g statt der Strecke $\overrightarrow{SA}$ eine andere (eigentliche) Strecke $\overrightarrow{S_0A_0}$ als neue Einheitsstrecke (etwa mit derselben ausgezeichneten Richtung von g) gewählt, so ergibt sich bei analoger Ausführung der Reihenbestimmung von Punkten $S_0, A_0, B_0 \ldots$ und $\ldots \bar{C}_0, \bar{B}_0, \bar{A}_0, S_0$ für diese Reihen derselbe gemeinsame Grenzpunkt U bzw. dieselben Grenzpunkte U, V bzw. kein Grenzpunkt wie im ursprünglichen Falle.

Denn liegt z. B. wie in der Fig. 33 S_0 auf der Strecke $\overrightarrow{AB}$ und A_0 auf der Strecke $\overrightarrow{BC}$, so ist die Strecke $\overrightarrow{S_0A_0}$ kleiner als die Strecke der Länge 2, also die Strecke $\overrightarrow{S_0B_0}$ kleiner als 4, $\overrightarrow{S_0C_0}$ kleiner als 6 und so fort. Hat daher z. B. die

ursprüngliche Reihe der Punkte $S, A, B, C \ldots$ den Grenzpunkt U, so daß die Strecke $\overrightarrow{SU}$ größer als jede endliche Strecke ist, so muß auch die Reihe der neuen Punkte $S_0, A_0, B_0 \ldots$ denselben Grenzpunkt U haben. Wir brauchen dies gewiß nicht im einzelnen auszuführen; wir wollen nur darauf hinweisen, daß es keinen Punkt der Reihe $S, A, B, C \ldots$ geben kann, der nicht von Punkten der neuen Reihe überschritten wird und andererseits keinen Punkt der Reihe $S_0, A_0, B_0 \ldots$, der nicht von Punkten der alten Reihe überschritten wird.

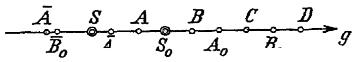


Fig. 33.

Ferner gilt überhaupt der allgemeine Satz:

5. *Ist auf* e i n e r *eigentlichen Geraden g ein, zwei oder kein unendlich ferner Punkt vorhanden, so gibt es auch auf* j e d e r *anderen Geraden g' bzw. einen unendlich fernen Punkt U'^{∞}, zwei unendlich ferne Punkte U'^{∞}, V'^{∞} oder keinen unendlich fernen Punkt.*

Was diesen Satz betrifft, so brauchen wir ja nur die Verhältnisse von der Geraden g des Satzes 3 auf die Gerade g' durch eine entsprechende Bewegung zu übertragen, welche den Punkt S mit Richtung und Seite von g in den Punkt S' mit Richtung und Seite von g' überführt (Fig. 34). Hierbei gehen dann z. B. die Punkte $A, B, C \ldots$ von g in die entsprechenden Punkte $A', B', C' \ldots$ von g' über, wobei $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{S'A'} = \overrightarrow{A'B'}$ und so fort ist, und der etwa vorhandene Grenzpunkt U^{∞} der Reihe $A, B, C \ldots$ geht in den Grenzpunkt U'^{∞} der Reihe $A', B', C' \ldots$ über.

Es gilt dementsprechend auch der Satz:

6. *Durch jede Bewegung, welche eine Gerade g in dieselbe oder eine andere Gerade g' überführt, gehen die evtl. vorhandenen unendlich fernen Punkte der entsprechenden Geraden ineinander über.*

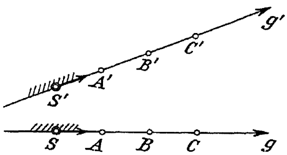


Fig. 34.

Sind z. B. U^{∞}, V^{∞} die unendlich fernen Punkte von g, U'^{∞}, V'^{∞} die unendlich fernen Punkte von g', so gehen die Punkte U^{∞}, V^{∞} in die Punkte U'^{∞}, V'^{∞} oder auch umgekehrt in die Punkte V'^{∞}, U'^{∞} über (Fig. 35).

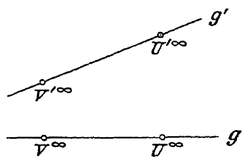


Fig. 35.

Wir können hier auch einen Blick zurückwerfen auf das bereits im Bd. I, S. 71 erwähnte (metrische) *archimedische Axiom:*

7. *Ersichtlich erscheint hier, in jeder der drei Geometrien, die Aussage dieses archimedischen Axioms als ein Satz, wobei es sich natürlich nur um eigentliche Punkte hierbei handelt.*

Wir stellen nun die *Definition* auf:

8. Wir nennen jede Verbindungslinie eines eigentlichen, außerhalb einer beliebigen Geraden g gelegenen Punktes M mit einem unendlich fernen Punkt U^∞ *von g eine Parallele zu g* (Fig. 36).

Somit gilt der Satz:

9. Hat eine Gerade g einen, zwei oder keinen unendlich fernen Punkt, so können wir auch durch jeden eigentlichen außerhalb g gelegenen Punkt M eine, zwei oder keine Parallele zu g legen.

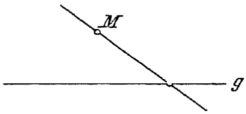


Fig. 36.

Hier erscheint also auf Grund der von uns gewählten Formen des Parallelenaxioms 3 die Aussage des Satzes 9 eben als ein Satz, an Stelle der gewöhnlichen Form des Parallelenaxioms: Zu jeder Geraden *g* soll sich durch einen beliebigen Punkt *M* bzw. eine, zwei oder keine Parallele legen lassen (vgl. unsere frühere Betrachtung im Bd. I, § 2).

Wir richten nun einmal unser Augenmerk z. B. *in der hyperbolischen Geometrie* auf alle Strahlenrichtungen (vgl. die Definition 1 S. 15), die von einem eigentlichen Punkte *S* ausgehen. Auf jeder Strahlenrichtung gibt es dann *einen* unendlich fernen Punkt. Hierdurch gewinnen wir schon einen ersten Einblick in die *Gesamtheit aller eigentlichen Punkte* (Fig. 37). Ist *P* ein beliebiger eigentlicher Punkt, so können wir ihn ja auch mit *S* verbunden denken, und durch die Punkte *P*, *S* zerfällt ihre Verbindungslinie ja in zwei projektive Strecken, von denen die eine eine eigentliche Strecke, d. h. eine nur eigentliche Punkte enthaltende Strecke ist. Sind *P*, *Q* zwei beliebige eigentliche Punkte, so gilt Analoges auch für deren Verbindungslinie. Nach den Axiomen der Verknüpfung und Anordnung von Hilbert, Pasch oder Schur muß ja auch eine der projektiven Strecken, in welche die Gerade *PQ* zerfällt, eine *eigentliche* Strecke sein (vgl. z. B. die Kernsätze bei Pasch a. a. O. S. 5 oder das Postulat 2 bei Schur a. a. O. S. 5).

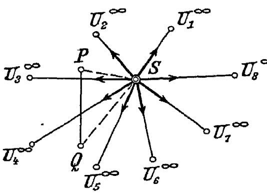


Fig. 37.

Die Gesamtheit aller eigentlichen Punkte ist hiernach auch in sich zusammenhängend, d. h. wir können stets von einem beliebigen eigentlichen Punkte *P* zu einem beliebigen eigentlichen Punkte *Q* so gelangen, daß wir hierbei nur eigentliche Punkte überschreiten, ja dies ist eben schon möglich, wenn wir auf der Geraden *PQ* selbst hierbei die eigentliche Strecke *PQ* gedanklich durchlaufen. Natürlich können wir auch von *P* nach dem ausgewählten Punkt *S* auf der Geraden *SP* und von ihm aus weiter nach *Q* auf der Geraden *SQ* gehen, d. h. gedanklich die eigentlichen Strecken *PS* und *SQ* durchlaufen.

Wir wollen für einen Augenblick den ursprünglichen Begriff „*Zeit*" hinzunehmen, der ja sonst in die Geometrie nicht eintritt, sondern erst in die Kinematik, und ferner auch den ursprünglichen Begriff der kontinuierlichen Bewegung (im Gegensatz zu unserem bisherigen Begriff der Bewegung, bei dem nur die Anfangs- und Endlage in Betracht kamen). Wir definieren als eine *gleichmäßige Geschwindigkeit* v eines Punktes auf einer Geraden eine solche, bei der der Punkt in gleichen Zeiten sich auf gleichen Strecken bewegt oder gleiche Strecken durchläuft. (Die Geschwindigkeit v ist eben der konstante Quotient aus der durchlaufenen Strecke und der zugehörigen Zeit.) Wählen wir dann eine solche gleichmäßige Geschwindigkeit v_0 aus, bei der der Punkt auf der ursprünglichen Geraden g der Fig. 34 S. 25 in der endlichen Zeit t_0 die Strecke $\overrightarrow{SA}$ durchläuft, so können wir leicht folgendes Resultat gewinnen:

10. Wir können stets mit dieser (endlichen) Geschwindigkeit v_0 von einem beliebigen eigentlichen Punkte P zu einem beliebigen eigentlichen Punkte Q in endlicher Zeit t_1 gelangen (wenigstens in Gedanken, evtl. also in Trillionen Jahren), *und zwar entweder auf der eigentlichen Strecke PQ oder auf den eigentlichen Strecken PS und SQ. Wir können aber niemals von dem Punkte P auf der Geraden PQ in endlicher Zeit zu dem einen oder anderen unendlich fernen Punkte der Geraden PQ oder gar zu einem überunendlich fernen Punkte gelangen.* Doch dies sei nur nebenbei erwähnt.

Wir kehren nun zu unserer reinen Geometrie und zwar zu der hyperbolischen Geometrie zurück. Wenn wir die Fig. 38 der beiden Strahlenrichtungen von S aus mit den beiden Punkten P, Q auf ihnen näher betrachten wollen, so möchten wir natürlich weiter gern wissen, welche der beiden Strecken PQ die eigentliche Strecke ist. Gehört vielleicht die eigentliche Strecke PQ insofern dem konkaven Winkel am Scheitel S an, so daß stets, wenn R ein Punkt der eigentlichen Strecke PQ ist, dann die eigentliche Strecke SR einer Strahlenrichtung des konkaven Winkels angehört. Ferner möchten wir folgendes wissen: Es sei eine Gerade g mit dem eigentlichen Punkt S und den beiden unendlich fernen Punkten U^∞, V^∞ gegeben und außerdem eine zweite (eigentliche) Gerade g' durch den Punkt U^∞ mit dem eigentlichen Punkt S' (Fig. 39). Ist dann der Punkt U^∞ auch stets einer der beiden unendlich fernen Punkte auf g'? Wenn dies der Fall ist, so gilt natürlich auch der Satz:

11. Wenn die Gerade g' zur Geraden g parallel ist, so ist auch die Gerade g zu g' parallel.[1])

1) Vgl. deswegen auch Hilbert, a. a. O. 1930, S. 163, sowie eine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit: Fr. Schilling, Neue Beispiele von ebenen Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind.

Werden überhaupt durch eine *beliebige* Bewegung (z. B. durch die Bewegung, welche den Punkt S mit den von ihm ausgehenden Strahlenrichtungen in den Punkt S' mit seinen Strahlenrichtungen überführt) alle unendlich fernen Punkte stets wieder in solche übergehen und alle eigentlichen Punkte wieder in eigentliche Punkte und auch alle überunendlich fernen Punkte in überunendlich ferne Punkte, so daß diese drei Arten von Punkten unbedingt voneinander verschieden sind?

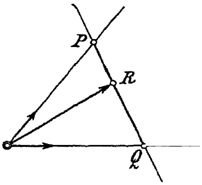


Fig. 38.

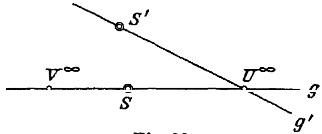


Fig. 39.

Auf alle solche Fragen hier schon näher einzugehen, können wir uns ersparen. Wir werden aber sogleich im § 13 den Bereich *aller* eigentlichen Punkte in der hyperbolischen Geometrie genau bestimmen. Damit finden alle solche Fragen dann von selbst ihre Antwort. Es sei nur noch darauf hingewiesen, daß natürlich für die euklidische Geometrie analoge Überlegungen anzustellen sind, die aber auch sogleich ihre Erledigung im folgenden § 10 finden.

Doch wollen wir noch eine interessante Bemerkung hier anschließen. Anstatt das eine oder andere der drei möglichen Parallelenaxiome an die Spitze der weiteren Untersuchung zu stellen, könnten wir ersichtlich auch so vorgehen: Wir wissen ja nach dem Satze 9 S. 6, daß *die Gesamtheit aller Bewegungen eine dreigliedrige Gruppe* bildet. Wir könnten daher zunächst einmal alle überhaupt möglichen dreigliedrigen Untergruppen der Gruppe aller projektiven Transformationen aufstellen. Eine solche Untergruppe haben wir ja bereits durch den Satz 4, Bd. I, S. 177 kennengelernt.[1])

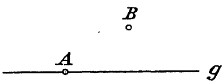


Fig. 40.

Dann müßten wir untersuchen, welche dieser Untergruppen überhaupt mit unseren bisher eingeführten Axiomen (abgesehen vom Parallelenaxiom) verträglich sind. Diejenige dreigliedrige Untergruppe z. B., welche zwei gegebene Punkte A, B und eine durch den einen Punkt A gehende Gerade g unverändert läßt, kommt hier als Bewegungsgruppe nicht in Frage (Fig. 40); denn eine beliebige andere durch A gehende Gerade h könnte nur in eine andere Gerade h' durch A übergehen, was dem Bewegungsaxiom 2 S. 3 widerspricht. Wir würden jedenfalls finden, daß demgemäß überhaupt nur drei Untergruppen als Bewegungsgruppen in Betracht zu ziehen sind. *Das nun einzuführende Parallelenaxiom hätte dann festzusetzen, welche dieser drei Untergruppen nun in der Ebene gültig sein soll.* Der hier angedeutete, gewiß bemerkenswerte Weg ist in der Tat nach dem

1) Vgl. die Anm. Bd. I, S. 178. In den dort angeführten Schriften von Franz Meyer und F. Klein finden sich Zusammenstellungen aller dreigliedrigen projektiven Untergruppen für die Ebene.

Vorgange von H. v. Helmholtz erfolgreich von Sophus Lie beschritten worden.[1]) Immerhin ist dieser Weg ein etwas weit abführender Umweg, so daß er für uns nicht in Betracht kommt.

§ 10. Das Parallelenaxiom und die euklidische Geometrie.

Wir wollen nun nacheinander die Bedeutung von jeder der drei im Satze 3 S. 24 ausgesprochenen Möglichkeiten des Parallelenaxioms für den weiteren Aufbau der drei Geometrien behandeln. Wir betrachten zunächst die *euklidische Geometrie:* Jede Gerade hat also stets und nur *einen* unendlich fernen Punkt. Gegeben sei die eigentliche Gerade g und die Senkrechte h zu ihr mit dem (eigentlichen) Fußpunkt F (Fig. 41). Wir nehmen noch die Senkrechte k in einem beliebigen eigentlichen Punkte A von h hinzu; der Schnittpunkt von g, k ist der absolute Pol H von h. Diese Gerade k ist auch die Parallele durch A zu g. Denn durch die Umwendung um h gehen ja die Geraden g, k in sich über. Durch die Umwendung um h muß aber auch der unendlich ferne Punkt von g wie von k in sich übergehen (nach dem Satze 6 S. 25). Da nun der Punkt H außer F bzw. A der einzige Punkt von g bzw. k ist, der durch die Umwendung um h in sich übergeht, so ist er der gemeinsame unendlich ferne Punkt der Geraden g, k (vgl. den Satz 11 S. 27). Wir wollen daher auch die Bezeichnung H^∞ anwenden, um dies zum Ausdruck zu bringen.

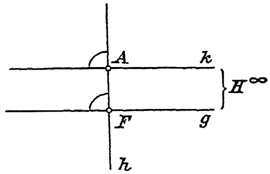


Fig. 41.

1. Der absolute Pol einer beliebigen Geraden h ist also ein uneigentlicher, d. h. hier ein unendlich ferner Punkt H^∞. Dieser Punkt H^∞ ist eben der unendlich ferne Punkt einer beliebigen Senkrechten zur Geraden h.

Mit anderen Worten gilt der Satz:

2. Alle Senkrechten zu derselben Geraden h haben denselben unendlich fernen Punkt H^∞, sind also zueinander parallel.

Hieraus folgt sofort weiter:

3. Alle (von $G^\infty H^\infty$ verschiedenen) Senkrechten h_i zu derselben Geraden g (d. h. alle Geraden durch den unendlich fernen absoluten Pol G^∞ von g) haben den unendlich fernen Punkt H^∞ von g als ihren gemeinsamen absoluten Pol (Fig. 42).

Wir wollen nun die Paare der einander zugeordneten Punkte F_i, H^∞ auf der Geraden g (wo also F_i der jedesmalige Fußpunkt einer Senkrechten h_i zu g

1) Vgl. insbesondere: R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908, S. 262—264. (Das Werk von H. v. Helmholtz und die Untersuchungen von Sophus Lie.) Dort ist auch die Originalliteratur übersichtlich angegeben.

und H^∞ der unendlich ferne Punkt von g ist) als *konjugierte Pole* bezeichnen. Dann können wir den letzten Satz auch wie folgt aussprechen:

4. Die konjugierten Pole F_i, H^∞ auf einer beliebigen Geraden g bilden stets eine parabolische Involution mit dem Punkte H^∞ als Doppelpunkt.

Es sei gleich hier bemerkt: Die vorstehenden Sätze enthalten ja alle sehr einfache, fast triviale Eigenschaften, zumal uns die euklidische Geometrie wohlbekannt ist. Gleichwohl ziehen wir es vor, wegen der uns nützlichen Analogie mit den später entwickelten analogen Eigenschaften der elliptischen und hyperbolischen Geometrie noch weiter solche euklidische Sätze anzugeben.

Wir ziehen nun in der Figur der beiden Senkrechten g, h mit dem Fußpunkt F und den absoluten Polen G^∞, H^∞ (den unendlich fernen Punkten bzw. von h und g) eine beliebige neue Gerade p durch den Punkt F mit dem Schnittpunkt L auf $G^\infty H^\infty$ (Fig. 43; wegen dieser Figur vgl. den Satz 9, Bd. I, S. 50). Durch die Umwendung $\mathfrak{A}$ um den Punkt F geht nun ersichtlich die Gerade $G^\infty H^\infty$ in sich über (vgl. den Satz 2 S. 13) und damit auch der Punkt L als einziger von F verschiedener Punkt der Geraden p mit dieser Eigenschaft. Hieraus folgt aber, daß der Punkt L der unendlich ferne Punkt der Geraden p sein muß.

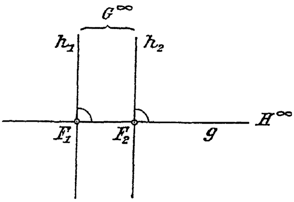


Fig. 42.

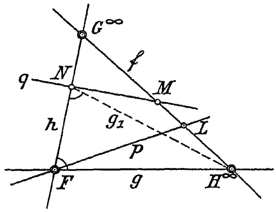


Fig. 43.

Wir wählen aber weiter statt der Geraden p nun eine beliebige neue Gerade q mit den Schnittpunkten M und N bzw. auf $G^\infty H^\infty$ und FG^∞ (Fig. 43). Dann steht ja auch die Verbindungslinie $NH^\infty = g_1$ auf der Geraden h im Punkte N senkrecht und hat also ebenfalls den Punkt G^∞ als ihren absoluten Pol. Durch die Umwendung um N muß also (aus demselben Grunde, der soeben für den Punkt L galt) auch der Punkt M in sich übergehen, d. h. der unendlich ferne Punkt der Geraden NM sein. Somit gewinnen wir den allgemeinen Satz:

5. Der unendlich ferne Punkt jeder beliebigen, von $G^\infty H^\infty$ verschiedenen Geraden ist ihr Schnittpunkt mit der Geraden $G^\infty H^\infty$.

6. Die Gerade $G^\infty H^\infty$ enthält also die Gesamtheit aller unendlich fernen Punkte. Wir nennen demgemäß diese Gerade die unendlich ferne Gerade der euklidischen Ebene.

7. Diese (unendlich ferne) Gerade $G^\infty H^\infty$ können wir also als die absolute Polare des Punktes F, wie des Punktes N, überhaupt jedes eigentlichen Punktes ansehen. Das absolute Polarsystem ist in der euklidischen Geometrie demnach ausgeartet (da nicht eineindeutig in der ganzen projektiven Ebene jedem Punkte

eine absolute Polare und jeder Geraden *ein* absoluter Pol entspricht, vgl. die Bemerkung im Anschluß an den Satz 5 S. 148 im Bd. I).

Wir wählen nun bei zwei beliebigen Senkrechten p, q mit dem Schnittpunkt R und den absoluten Polen P^∞, Q^∞ das Dreieck $RP^\infty Q^\infty$ als *Fundamentaldreieck* für ein projektives Koordinatensystem (Fig. 44). Ferner sollen auf q, p die Punkte E_1, E_2 so gewählt sein, daß $RE_1 = RE_2$ ist. Die Strecke RE_1 sei auch als Einheitsstrecke (als Strecke von der Länge 1) gewählt. Der *Einheitspunkt* E des Koordinatensystems sei endlich der Schnittpunkt von E_1Q^∞ und E_2P^∞. Dann ist das projektive Koordinatensystem in der euklidischen Ebene, wie wir sogleich näher erkennen werden, ein kartesisches Koordinatensystem, wie es uns von der gewöhnlichen analytischen Geometrie her wohlbekannt ist (vgl. die Fig. 48, Bd. I, S. 58). Es sind nämlich auch die Winkel der Figur am Scheitel E rechte Winkel, da ja die Gerade E_1Q^∞ den Punkt P^∞ als absoluten Pol besitzt, gemäß dem Satze 3.

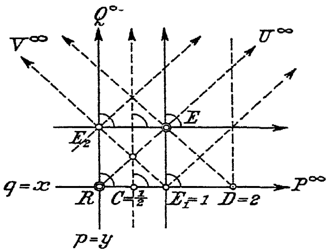


Fig. 44.

Es sind weiter die Strecken auf der x-Achse (wie auf der y-Achse) vom Punkte n bis $n+1$ des projektiven Koordinatensystems für jeden positiven oder negativen ganzzahligen Wert n gleich der Einheitsstrecke. Denn auf der x-Achse sind ja z. B. die Punkte mit den Abszissen $1, \infty, 0, 2$ vier harmonische Punkte (nach den Entwicklungen des § 7, Bd. I). Durch die Umwendung um die Gerade E_1Q^∞ geht aber der Punkt R in den vierten harmonischen Punkt D zu E_1, P^∞ und R über (nach dem Satze 6 S. 8), also in den Punkt mit der Abszisse 2, d. h. *die Strecken RE_1 und E_1D sind einander gleich.*

Ferner sind auch die Strecken E_1E und E_2E Einheitsstrecken. Denn ist C der Punkt der x-Achse mit der Abszisse $\frac{1}{2}$ (nach der Möbiusschen Netzkonstruktion), so geht durch die Umwendung um CQ^∞ ersichtlich der Punkt R in den vierten harmonischen Punkt zu C, P^∞ und R, also in den Punkt E_1 über, die Senkrechte RE_2 zu g in die Senkrechte E_1E zu g, die Gerade EE_2 aber in sich selbst (da ja $E_2P^\infty \perp CQ^\infty$ ist), also die Strecke RE_2 in die Strecke E_1E. Es ist also auch die Strecke E_1E Einheitsstrecke.

Wir erkennen somit leicht:

8. *Die Möbiussche Netzkonstruktion ergibt zunächst die Einteilung der ganzen Ebene in Quadrate mit Einheitsstrecken als Seiten und sodann die weitere Einteilung dieser Quadrate in je vier neue kongruente Quadrate und so fort.*

Diese Überlegungen genügen, um die Übereinstimmung des projektiven Koordinatensystems mit dem kartesischen Koordinatensystem erwiesen zu haben.

Wir denken ferner folgende Bewegung im Anschluß an die Fig. 44 ausgeführt: Es soll die x-Achse mit dem Punkt R, ihrer positiven Richtung und der durch die positive Richtung der y-Achse bestimmten Seite in die y-Achse mit dem Punkte R, ihrer positiven Richtung und der durch die negative Richtung der x-Achse bestimmten Seite übergehen. Diese Bewegung können wir als *„Drehung um den Punkt R durch einen rechten Winkel“* bezeichnen. *Hierbei geht dann ersichtlich jeder Punkt* (x, y) *in den Punkt* $(\bar{x}, \bar{y}) = (-y, x)$ *über.*

Es seien jetzt zwei beliebige zueinander senkrechte Geraden g', h' in der Erweiterung der Fig. 44 gegeben. Der absolute Pol der einen Geraden ist dann der Schnittpunkt der anderen mit $P^\infty Q^\infty$, und der absolute Pol der einen Geraden ist der unendlich ferne Punkt der anderen. Statt der beliebigen Geraden g', h' können wir für die folgende Betrachtung auch die beiden Parallelen g, h zu ihnen durch den Anfangspunkt R wählen, die ja dieselben absoluten Pole G^∞, H^∞ bzw. unendlich fernen Punkte H^∞, G^∞ besitzen (Fig. 45). Wir wollen nun die Zuordnung der Punkte G^∞, H^∞ auf der unendlich fernen Geraden $P^\infty Q^\infty$ berechnen. Wir brauchen hier also nur die Zuordnung der Strahlen durch R zu betrachten, bei der je zwei Strahlen aufeinander senkrecht stehen. Bei der Drehung um R durch einen rechten Winkel geht nun die Gerade h in die Gerade g über (Fig. 45) und irgendein Punkt $A = (x, y)$ von h in den Punkt $\bar{A} = (\bar{x}, \bar{y}) = (-y, x)$ von g (vgl. etwa auch die Kongruenz der Dreiecke RAA' und $R\bar{A}\bar{A}'$ der Fig. 45).

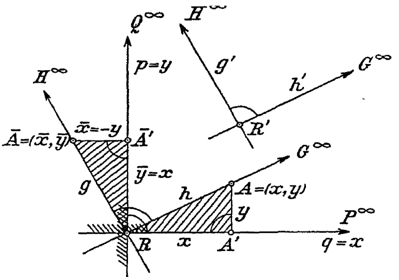


Fig. 45.

Mit anderen Worten:

9. Der Strahl $\frac{x}{y} =$ konst. *entspricht dem Strahl* $\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -\frac{y}{x}$, *und die Zuordnung der Punkte* G^∞, H^∞ *auf der unendlich fernen Geraden* $s = 0$ *wird also durch die Gleichung*

$$x\bar{x} + y\bar{y} = 0 \tag{1}$$

gegeben. Diese Zuordnung ist (nach den Sätzen 1, 2, 3, Bd. I, S. 145—147) *eine elliptische Involution. Sie besitzt hier die Doppelpunkte*

$$\frac{x}{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \pm i, \quad (s = \bar{s} = 0).$$

Diese konjugiert-imaginären Punkte der unendlich fernen Geraden bezeichnen wir als „imaginäre Kreispunkte“. Nämlich alle Kreise der euklidischen Ebene und nur diese unter den nicht zerfallenden Kegelschnitten gehen durch diese Punkte hindurch (vgl. auch S. 88ff.).

Im Hinblick auf den Satz 10 Bd. I S. 150 können wir weiter sagen:

10. Je zwei Strahlen der euklidischen Geometrie stehen aufeinander senkrecht, wenn sie harmonisch liegen zu den Strahlen von ihrem Schnittpunkte nach den imaginären Kreispunkten.

Soviel sei zunächst über die uns ja wohlbekannte euklidische Geometrie in ihrem Verhältnis zum Parallelenaxiom und der projektiven Geometrie ausgeführt; später kommen wir noch wiederholt auf die euklidische Geometrie zurück, um sie noch weiter von unserem neuen Standpunkt aus zu beleuchten.

§ 11. Das Parallelenaxiom und die elliptische Geometrie.

Wir wollen uns nun zunächst weiter zur *elliptischen* Geometrie hinwenden. Sie bietet ja gegenüber der euklidischen sowie der hyperbolischen Geometrie den Vorteil, daß die ganze projektive Ebene nur *eigentliche* Punkte und *eigentliche* Geraden enthält. Da wir nach dem Axiom 2 S. 3 jede Gerade durch eine Bewegung in jede andere überführen können, so gilt zunächst der wichtige Satz:

1. In der elliptischen Geometrie sind alle Geraden endlich und gleich lang. Wir bezeichnen diese konstante Länge mit l; hierbei ist natürlich eine Einheitsstrecke zur Ausmessung zugrunde zu legen, wenn die Länge l durch eine Maßzahl gegeben sein soll. Darauf kommen wir später zurück.

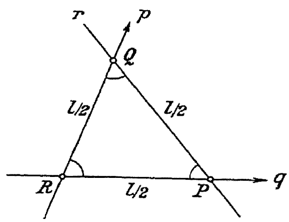


Fig. 46.

Es sei jetzt eine beliebige Gerade p und ihr absoluter Pol P, der Schnittpunkt aller Senkrechten zu p, gegeben (Fig. 46). Ferner sei q eine beliebige Senkrechte zu p mit dem Fußpunkt R. Ihr absoluter Pol Q liegt dann nach dem Satze 5 S. 11 auf p. Nehmen wir noch die Verbindungslinie PQ oder r hinzu, so muß deren absoluter Pol der Punkt R sein (wieder nach dem Satze 5 S. 11), d. h.:

2. Die konkaven Winkel an den Punkten P, Q, R sind sämtlich rechte Winkel.

Wir denken noch auf p, q positive Richtungen festgelegt. Durch die Umwendung um p geht nun der Punkt P und damit auch die Gerade PR (wie auch PQ) in sich über. Es sind also die Strecken $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PR}$ einander gleich, d. h.:

3. In der elliptischen Geometrie wird eine beliebige Senkrechte zu einer Geraden p durch den absoluten Pol P halbiert. Jede Hälfte ($\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{PR}$) ist also gleich $\frac{l}{2}$.

Die einzelnen Teile der Geraden in der Fig. 46 sind demnach sämtlich einander gleich, d. h. jedes der 4 kongruenten Dreiecke, in welche die ganze

Ebene durch die drei Geraden zerlegt wird, ist ein gleichseitiges Dreieck mit drei rechten Winkeln. Jedes dieser Dreiecke können wir auch als ein *absolutes Polardreieck* bezeichnen (vgl. den Satz 2 Bd. I S. 178), d. h. jede Ecke ist der absolute Pol der Gegenseite und jede Seite die absolute Polare der Gegenecke. Durch die Umwendungen um jede Seite geht ja auch die Gegenecke in sich über und durch die Umwendung um jede Ecke geht die Gegenseite in sich über.

Nach den Sätzen 5 S. 8 und 3 S. 13 gilt nun ersichtlich der Satz:

4. In der elliptischen Geometrie ist die Umwendung um irgendeine Gerade r gleichwertig mit der Umwendung um den absoluten Pol R der Geraden.

Ferner wissen wir bereits nach dem Satze 9 S. 14, daß die Aufeinanderfolge der Umwendungen um zwei Senkrechte p, q stets gleichwertig mit der Umwendung um ihren Schnittpunkt R ist.

Es folgt dann weiter sogleich:

5. Die Aufeinanderfolge der drei Umwendungen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ um die drei Seiten p, q, r eines absoluten Polardreiecks ergibt die Identität.

Denn es ist ja $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{R}.$

Also ist auch $\mathfrak{P} \cdot \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} \equiv 1.$

Von diesem an sich interessanten Satze werden wir indessen keinen Gebrauch machen.

Wir können also dem Vorstehenden gemäß hier in der elliptischen Geometrie zu den Sätzen 11a, b S. 14 die wichtige Ergänzung hinzufügen, da wir es ja in der projektiven Ebene nur mit *eigentlichen* Punkten und Geraden zu tun haben:

6. Ist der Punkt G der absolute Pol zur Geraden g (gemäß der Definition 1 S. 8), so ist s t e t s *auch die Gerade g die absolute Polare zum Punkte G (gemäß der Definition 11 S. 14;* vgl. die ganz anderen Verhältnisse bei der euklidischen Geometrie im § 10).

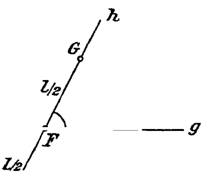


Fig. 47.

Wir können ja z. B., wenn die Gerade g gegeben ist, in einem beliebigen Punkte F auf ihr die Senkrechte h errichten und auf dieser von F aus (in der einen oder anderen Richtung) die Strecke $\frac{l}{2}$ bis G abtragen (Fig. 47). Dann ist eben G der absolute Pol zu g und g die absolute Polare zu G. (Denn durch die Umwendung um g geht G in sich über und durch die Umwendung um G geht g in sich über).

Es sind also die Punkte und Geraden in bestimmter Weise einander zu Paaren zugeordnet. Diese Zuordnungen nennen wir das *absolute Polarsystem* (die absolute Polarenverwandtschaft) in der elliptischen Ebene. Dieses absolute

Polarsystem nun noch näher zu studieren, bis wir es völlig anschaulich erfassen und durch eine Gleichung beherrschen, ist die wesentliche Aufgabe der nächsten Betrachtungen.

Wir erinnern uns zunächst noch einmal an den Satz 5 S. 11. Als eine Erweiterung dieses Satzes ist dann der folgende Satz anzusehen.

7. Je drei Geraden a, b, c durch denselben Punkt G entsprechen drei absolute Pole A, B, C auf derselben Geraden g, der absoluten Polaren zu G, und umgekehrt (Fig. 48).

Wir wollen aber sogleich die folgende *Definition* anschließen:

8. Zwei Punkte A, A′ heißen ***konjugierte absolute Pole****, wenn die absolute Polare des einen Punktes durch den anderen geht.*

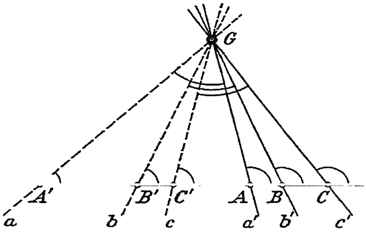


Fig. 48.

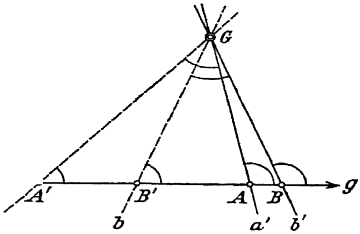


Fig. 49.

In der Fig. 48 beispielsweise sind also die Punkte A, B, C bzw. zu den Punkten A', B', C' konjugierte absolute Pole (vgl. die Definition 6 S. 12).

Endlich wollen wir noch folgenden Satz ableiten:

9. In der elliptischen Geometrie trennen sich auf einer Geraden g stets zwei Paare konjugierter Pole A, A′ und B, B′ voneinander.

Gegeben sei zunächst die Gerade g und ihr absoluter Pol G. Durch G sei die beliebige Gerade a mit dem Schnittpunkt A' auf g gezogen und ferner sei die Senkrechte a' in G zu a mit dem Schnittpunkt A auf g hinzugefügt (Fig. 49). Dann ist wieder das Dreieck $AA'G$ ein absolutes Polardreieck. Es sei noch zu unserer bequemen Ausdrucksweise eine positive Richtung auf der Geraden g angegeben. Auf der Strecke $\overrightarrow{A'A}$ sei nun noch ein beliebiger Punkt B' angenommen und mit G durch die Gerade b verbunden. Endlich sei auf b in G die Senkrechte b' mit dem Schnitt B auf g gezeichnet.

Dann sind, ebenso wie A, A', auch B, B' konjugierte Pole auf g. Unser Satz 9 ist nun bewiesen, wenn wir nachweisen, daß der Punkt B stets auf der Strecke $\overrightarrow{AA'}$ gelegen ist. Es ist ja nun die Strecke

$$A'\acute{A} = A\acute{A}' = B'\acute{B} = B\acute{B}' = \frac{\iota}{2}\,.$$

Würde nun B auch innerhalb der Strecke $A'A$ gelegen sein und zwar entweder innerhalb $\overrightarrow{A'B'}$ oder innerhalb $\overrightarrow{B'A}$, so könnte $\overrightarrow{A'A}$ nicht gleich $\overrightarrow{BB'}$ bzw. gleich $\overrightarrow{B'B}$ sein. Folglich muß B auf der Strecke $\overrightarrow{AA'}$ liegen.

Jedem Punkte der Geraden g entspricht also ein bestimmter anderer Punkt als sein konjugierter absoluter Pol. Wir können unsere bisherigen Betrachtungen daher sogleich noch durch einen weiteren Satz ergänzen und damit anschaulicher gestalten; dieser Satz ist zwar für unsere weiteren Betrachtungen nicht vorauszusetzen notwendig, wird sich vielmehr leicht aus diesen von selbst ergeben, so daß die folgende Betrachtung dieses Paragraphen auch übergangen werden kann. Dieser Satz lautet:

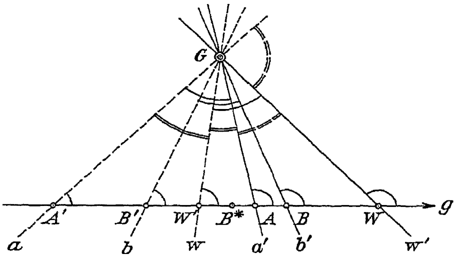


Fig. 50.

10. In der elliptischen Geometrie bilden die Paare konjugierter absoluter Pole auf einer Geraden g stets eine elliptische Involution (vgl. den Satz 4 der euklidischen Geometrie S. 30).

Der Beweis dieses Satzes an dieser Stelle sei wie folgt angedeutet: Wir denken in der Fig. 49, in der die Strahlen a, a' unverändert sein sollen, während b, b' beliebige hinzugenommene Strahlen seien, noch die beiden Winkelhalbierenden w, w' der Winkel zwischen den Geraden a, a' hinzugefügt. Diese Geraden w, w' stehen dann auch aufeinander senkrecht und schneiden die Gerade g in den konjugierten absoluten Polen W, W' (Fig. 50; in dieser Figur sind die rechten Winkel durch einen Bogen, die einander gleichen Winkel, die ja einen halben rechten Winkel betragen, durch zwei Bogen angedeutet). Durch die Umwendung um die Gerade a' geht dann der Punkt A' in sich über, die Punkte W und W' dagegen vertauschen sich, während der Punkt B in den vierten harmonischen Punkt B^* zu A, A' und B übergeht (vgl. die Sätze 5 und 6 S. 8). Es sind also auch die Punkte A, A' durch W, W' harmonisch getrennt und es ist ferner $\overrightarrow{A'W'} = \overrightarrow{W'A} = \overrightarrow{AW} = \overrightarrow{WA'} = \frac{l}{4}$ und $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B^*A}$. Durch die Umwendung um w geht aber der Punkt B^* in B' über, da die Strecke $B'W'$ gleich der Strecke $W'B^*$ ist. Es sind also auch die Punkte B', B^* harmonisch zu den Punkten W, W', d. h. die Punktepaare B', B^* bilden eine hyperbolische Involution mit den Doppelpunkten W, W'.

Also bilden die Punktepaare B, B' diejenige elliptische Involution, die durch die miteinander harmonischen Punktepaare A, A' und W, W' festgelegt ist (vgl. den Satz 14, Bd. I S. 152).

§ 12. Festlegung des elliptischen absoluten Polarsystems durch eine Gleichung.

Nun werden wir noch einen weiteren wichtigen Schritt ausführen, immer im Hinblick auf das Ziel, die Metrik der elliptischen Geometrie in die projektive Geometrie einzuordnen.

Wir knüpfen wieder an das absolute Polarsystem in der elliptischen Ebene an, dem gemäß ein beliebiger Punkt G und eine zugehörige Gerade g einander als absoluter Pol und als absolute Polare zugeordnet sind (vgl. den Satz 6 S. 34). Wir wollen nun vorübergehend einen *beliebigen*, aber bestimmten einteiligen Kegelschnitt k der Ebene zu Hilfe nehmen (Fig. 51). Jeder Geraden g ist dann auch ein bestimmter Punkt $\bar{G}$ als gewöhnlicher Pol bezüglich des Kegelschnittes zugeordnet. Wir richten nun unser Augenmerk auf die Zuordnung der Punkte G, $\bar{G}$, die derselben Geraden g somit als absoluter Pol und als gewöhnlicher Pol bezüglich k entsprechen. Wir behaupten nun:

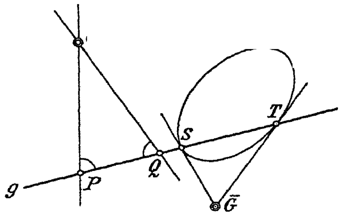


Fig. 51.

1. Diese Verwandtschaft der Punkte G_i, $\bar{G}_i$ in der Ebene ist notwendig eine gewöhnliche projektive Verwandtschaft oder eine Kollineation (d. h. das absolute Polarsystem ist eine spezielle korrelative Verwandtschaft, vgl. die Sätze 7 und 9 Bd. I S. 181).

Denn blicken wir zu dem Satze 6 Bd. I S. 131, dem Fundamentalsatze der ebenen projektiven Geometrie, zurück, so sehen wir: Die dort geforderten Eigenschaften sind hier gerade erfüllt. Insbesondere entsprechen auch gemäß den Sätzen 3 Bd. I S. 130 und 7 S. 35 je drei Punkten A, B, C in gerader Linie wieder drei Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ in gerader Linie. Diese Verwandtschaft zwischen den Punkten G_i, $\bar{G}_i$ wird also bei Einführung eines beliebigen projektiven Koordinatensystems durch lineare Gleichungen festgelegt:

$$\begin{aligned} \varrho_1 \bar{x} &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 s, \\ \varrho_1 \bar{y} &= \alpha_1' x + \beta_1' y + \gamma_1' s, \quad \Delta_1 \neq 0. \\ \varrho_1 \bar{s} &= \alpha_1'' x + \beta_1'' y + \gamma_1'' s, \end{aligned} \qquad (1\text{a, b, c})$$

Die Polarenverwandtschaft bezüglich des Kegelschnittes k zwischen den Punkten $\bar{G}_i$ und ihren Polaren g_i wird ferner auch durch lineare Gleichungen dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_2 u &= \alpha_2 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \gamma_2 \bar{s}, \\ \varrho_2 v &= \alpha_2' \bar{x} + \beta_2' \bar{y} + \gamma_2' \bar{s}, \quad \Delta_2 \neq 0. \\ \varrho_2 t &= \alpha_2'' \bar{x} + \beta_2'' \bar{y} + \gamma_2'' \bar{s}, \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{a, b, c})$$

2. *Also wird die absolute Polarenverwandtschaft ebenfalls durch lineare Gleichungen dargestellt:*

$$\left.\begin{aligned} \varrho u &= \alpha x + \beta y + \gamma s, \\ \varrho v &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' s, \quad \Delta \neq 0. \\ \varrho t &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' s, \end{aligned}\right\} \qquad (3\,\text{a, b, c})$$

Unsere nächste Aufgabe soll nun darin bestehen, *diese Gleichungen* (3a, b, c) *auch bezüglich der Koeffizienten genau zu bestimmen* (vgl. die Gleichungen (6a, b, c) S. 41).

Wir wissen nun aber: Eine projektive Verwandtschaft ist *eindeutig* bestimmt, wenn wir vier Paare einander entsprechender Punkte G_i, $\overline{G}_i$ kennen, von denen nicht drei der Punkte G_i bzw. $\overline{G}_i$ in einer Geraden liegen, und ebenso ist eine korrelative Verwandtschaft (vgl. Satz 9 Bd. I S. 181) eindeutig bestimmt, wenn wir analog vier Paare entsprechender Punkte G_i und Geraden g_i kennen.

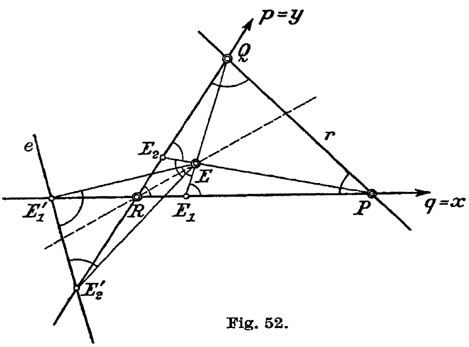


Fig. 52.

Folglich gilt auch der Satz:

3. *Das durch solche Gleichungen* (3a, b, c) *dargestellte absolute Polarsystem der elliptischen Ebene ist eindeutig projektiv festgelegt, wenn wir zu vier Punkten G_i, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, die vier zugeordneten absoluten Polaren g_i kennen.*

Nun wählen wir für unsere weitere Betrachtung als Ausgangspunkt ein beliebiges absolutes Polardreieck PQR aus, wie wir ein solches bereits S. 34 betrachtet haben. Dies soll als Fundamentaldreieck für das projektive Koordinatensystem mit dem Anfangspunkt R ausgewählt sein (Fig. 52). Als Einheitspunkt des Koordinatensystems sei noch ein zunächst beliebig gewählter Punkt E (der natürlich nicht auf einer der Seitengeraden des Dreiecks liegen soll), hinzugenommen, wodurch das Koordinatensystem festgelegt ist. Es seien, wie früher, E_1 und E_2 die Schnittpunkte von QE und PE bzw. mit der x- und y-Achse. *Die positiven Richtungen der x, y-Achsen sind dann ja dadurch festgelegt, daß E_1 (bzw. E_2) auf der Strecke $\overrightarrow{RP}$ (bzw. $\overrightarrow{RQ}$) gelegen sein soll.* Es ist ferner ja auch

$$QE_1 \perp x\text{-Achse}$$

und

$$PE_2 \perp y\text{-Achse.}$$

Wir denken nun noch die absolute Polare e zu E, wie folgt, konstruiert: Wir errichten im Punkte E auf QE_1 die Senkrechte mit dem Schnitt E_1' auf der

x-Achse und auch in E auf PE_2 die Senkrechte mit dem Schnitt E_2' auf der y-Achse. (In der Figur sind wieder alle rechten Winkel mit einem Bogen angegeben.) Dann ist E_1' der absolute Pol zu QE_1 und E_2' der absolute Pol zu PE_2.

4. Die Punkte E_1, E_1' trennen natürlich die Punkte P, R nach dem Satze 9 S. 35 und analog trennen die Punkte E_2, E_2' die Punkte Q, R.

Nun ist die Gerade $E_1'E_2'$ oder e also auch die absolute Polare zu E (vgl. den Satz 4 S. 11).

5. Es sind nunmehr in der Figur zu den vier Punkten P, Q, R, E, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, die absoluten Polaren p, q, r, e gegeben, wo p, q, r die den Ecken gegenüberliegenden Seiten des Fundamentaldreiecks sind. Die Verwandtschaft des absoluten Polarsystems ist also hiermit nach dem Satze 3 eindeutig festgelegt.

Wir wollen jetzt noch zur Vereinfachung unserer Betrachtung annehmen, daß der Einheitspunkt E auf der einen oder anderen Winkelhalbierenden der von p, q gebildeten Winkel gewählt ist, also auch in den kongruenten Dreiecken REE_1 und REE_2 die Seite

$$\overrightarrow{RE_1} = \overrightarrow{RE_2}$$

ist. (Wenn wir wollen, können wir die ausgewählte Strecke $\overrightarrow{RE_1}$ auch als „*Einheitsstrecke*“ ansehen.) Dann geht ersichtlich die ganze Fig. 52 durch Umwendung um die Gerade RE in sich über, so daß auch

$$\overrightarrow{E_1'R} = \overrightarrow{E_2'R} \quad \text{ist.}$$

Wir wollen uns indessen vor Augen halten: Mit unserer unmittelbaren Anschauung können wir die gesamte Figur nicht überblicken. In unserem wirklichen Raum, um den es sich ja stets handelt, ist die Länge l aller Geraden jedenfalls überaus groß anzunehmen. Wir können wohl den Teil der Figur, der aus dem Punkte R, den Senkrechten p, q und aus den Strecken $\overrightarrow{RE_1}$, $\overrightarrow{RE_2}$, den Senkrechten E_1E und E_2E bzw. zu p, q und dem Schnittpunkt E besteht, unmittelbar vor uns liegend annehmen. Dann liegen aber doch die Punkte P, Q sehr weit fort, und es ist besonders auch die Senkrechte in E auf EE_1 für die Anschauung nicht von EE_2 zu unterscheiden. Hier sind eben, wie wir schon früher hervorhoben, besondere Axiome zur logischen Vervollständigung unserer Anschauung hinzugetreten, vor allem auch das elliptische Parallelenaxiom. Für unsere Fig. 52 gilt natürlich die im Anschluß an den Satz 9 Bd I S. 50 ausgesprochene Bemerkung.

Hinsichtlich der Fig. 52 wollen wir noch folgendes hervorheben:

6. *Der konkave Winkel* $E_1\hat{E}E_2$ *ist hier stets ein stumpfer Winkel* (vgl. die Fig. 44 S. 31 der euklidischen Geometrie). Es folgt dies ja unmittelbar aus dem Satze 4.

Wesentlich kommt es jedenfalls dementsprechend bei der Fig. 52 auf die Lage der Punkte E_1' und E_2' an. Wir wollen jetzt annehmen, daß diese Punkte die Abszisse $\frac{x}{s} = (PRE_1E_1') = -\varkappa$ bzw. die Ordinate $\frac{y}{s} = -\varkappa$ besitzen, wo $\varkappa$ eine bestimmte positive (übrigens recht große) Zahl sei. Natürlich sind diese Abszisse und Ordinate, wie immer, nur Zahlenwerte, keine Längen.

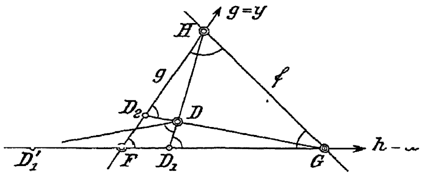


Fig. 53.

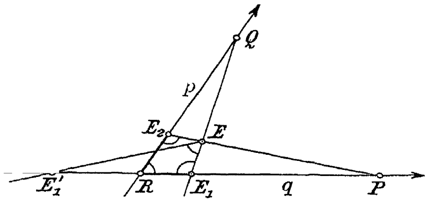


Fig. 54.

7. *Doch ist die Zahl* $\varkappa$ *von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig.* Nehmen wir ein beliebiges anderes absolutes Polardreieck FGH als Fundamentaldreieck und einen solchen Punkt D als Einheitspunkt, daß $\overrightarrow{FD_1} = \overrightarrow{FD_2} = \overrightarrow{RE_1}$ (Einheitsstrecke) ist (Fig. 53), so hat dann *auch in diesem Koordinatensystem* der absolute Pol D_1' von HD_1 die Abszisse $-\varkappa$. Denn die neue Figur ist völlig kongruent der alten.

Die Zahl $-\varkappa$ ist also als eine *Weltkonstante* anzusehen, ebenso wie die konstante Länge l aller Geraden. Wir werden später zeigen, daß die beiden Konstanten $\varkappa$ und l jedoch voneinander abhängen, so daß beide im wesentlichen nur *eine* Weltkonstante darstellen.

8. *Diese Weltkonstante* $-\varkappa$ *legt ja gleichsam fest, wie stark das elliptische Parallelenaxiom von dem euklidischen abweichen soll.* (Das euklidische Parallelenaxiom ergibt ja $E_1' = P$ in der Fig. 52 S. 38, d. h. $\varkappa = \infty$; vgl. die Fig. 44 S. 31.) Dementsprechend stellen wir noch folgendes wichtige *Axiom* auf:

9. Axiom der Weltkonstante $-\varkappa$ in der elliptischen Geometrie: *Es seien zwei Senkrechte q, p mit ihrem Schnittpunkt R angenommen, auf ihnen von R aus in positiven Richtungen die als solche ausgewählten Einheitsstrecken RE_1, RE_2 abgetragen und in E_1 bzw. E_2 die Senkrechte auf q bzw. p errichtet mit ihrem Schnittpunkt E* (Fig. 54), *wobei noch der Schnittpunkt P von q und EE_2 der absolute Pol von p ist. Ferner sei in E auf EE_1 die Senkrechte*

errichtet. Es sei dann noch auf der Geraden q ein projektives Abszissensystem konstruiert, in dem die Punkte R, E_1, P, *wo P der Schnitt von q mit* $E_2 E$ *sei, die Abszissen* $0, 1, \infty$ *besitzen. Dann soll der Schnittpunkt* E_1' *von q mit der Senkrechten in E auf* EE_1 *die Abszisse* $-\varkappa$ *besitzen, wo* $\varkappa$ *eine bestimmte positive, sehr große Zahl sei, oder mit anderen Worten: Es soll das Doppelverhältnis* $(P R E_1 E_1') = -\varkappa$ *sein.*

Dieses Axiom enthält in dem *Vorzeichen* der Abszisse von E_1' natürlich das Parallelenaxiom. Statt der Senkrechten im Punkte E_2 auf p können wir ja auch die Senkrechte in einem beliebigen anderen Punkte von p wählen.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß *diese Zahl* $-\varkappa$ *von der ausgewählten Einheitsstrecke* RE_1 *abhängt,* ebenso wie etwa der Radius r eines Kreises oder einer Kugel $\left(\text{und deren Krümmung } \frac{1}{r^2}\right)$ nur dann durch eine Maßzahl angegeben werden kann, wenn eine bestimmte Einheitsstrecke vorliegt. Im übrigen kommen wir später hierauf noch wiederholt eingehender zurück.

10. Die Gerade e, die absolute Polare des Einheitspunktes E, hat nun ersichtlich die Gleichung

$$x + y + \varkappa s = 0, \tag{4}$$

da diese Gerade ja durch die Punkte $E_1' = (-\varkappa, 0, 1)$ und $E_2' = (0, -\varkappa, 1)$ bestimmt ist.

Wir behaupten nun weiter den Satz:

11. Unsere absolute Polarenverwandtschaft in der elliptischen Geometrie wird durch die Gleichung

$$x x_0 + y y_0 + \varkappa s s_0 = 0 \tag{5}$$

festgelegt, die eben für jeden absoluten Pol (x_0, y_0, s_0) *seine absolute Polare darstellt, oder durch die Gleichungen*

$$\left.\begin{aligned} \varrho u &= x_0, \\ \varrho v &= y_0, \\ \varrho t &= \varkappa s_0, \end{aligned}\right\} \tag{6a, b, c}$$

wo u, v, t die Linienkoordinaten der absoluten Polaren sind.

Zum Beweise überzeugen wir uns zunächst leicht, daß diese Gleichungen richtig den Punkten P, Q, R, E, deren homogene Koordinaten ja $1, 0, 0$; $0, 1, 0$; $0, 0, 1$ und $1, 1, 1$ sind, ihre bekannten absoluten Polaren p, q, r, e zuordnen. Dann aber stellen die Gleichungen (6a, b, c) nach den Sätzen 2 und 3 das absolute Polarsystem dar.

Sogleich können wir noch weiter sagen, gemäß den Betrachtungen des § 30 S. 184ff. im Bd. I:

12. Die absolute Polarenverwandtschaft der elliptischen Geometrie ist nichts anderes als die Polarenverwandtschaft des nullteiligen Kegelschnittes

$$x^2 + y^2 + \varkappa s^2 = 0, \tag{7}$$

den wir demgemäß als absoluten Kegelschnitt bezeichnen. Dieser Kegelschnitt ist, ebenso wie das absolute Polarsystem, natürlich vom Koordinatensystem unabhängig.

(Es sei bemerkt, daß der absolute Kegelschnitt (7) für jeden Wert der Weltkonstante $-\varkappa$ stets durch die vier Punkte $(\pm i, 1, 0)$ und $(1, \pm i, 0)$ hindurchgeht.)

In diesem wichtigen Satze 12 haben wir das notwendige Bindeglied zwischen der projektiven Geometrie einerseits und der Metrik der elliptischen Geometrie andererseits oder die Grundlage für die projektive Deutung der elliptischen Maßverhältnisse zu erblicken, wie wir dies in der Folge im einzelnen noch sehen werden.

13. Insbesondere sind auf den x, y-Achsen die elliptischen Involutionen der konjugierten absoluten Pole (x, x_0) bzw. (y, y_0) durch die inhomogenen Gleichungen

$$x x_0 + \varkappa = 0$$

bzw.

$$y y_0 + \varkappa = 0$$

mit den Doppelpunkten $\quad x_{1,2}$ *bzw.* $y_{1,2} = \pm \sqrt{\varkappa} \cdot i$

bestimmt (vgl. den Satz 10 S. 36).

Die elliptische Involution konjugierter Pole auf der Geraden PQ der Fig. 52 S. 38 wird aber durch die Gleichung $x x_0 + y y_0 = 0$ $(s = 0)$ gegeben (vgl. den Satz 9 S. 32 der euklidischen Geometrie).

Zu der Bemerkung im Anschluß an das Axiom der Weltkonstante, S. 40, sei jetzt noch hinzugefügt:

Wenn wir bei demselben Fundamentaldreieck PQR (Fig. 52) statt des Punktes E etwa einen anderen Punkt $\bar{E}$ derselben Winkelhalbierenden, der durch die alten Koordinaten $(x_0, x_0, 1)$ festgelegt ist, als Einheitspunkt eines neuen projektiven $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystems einführen, so lautet die Gleichung desselben absoluten Kegelschnittes

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \frac{\varkappa}{x_0^2} \bar{s}^2 = 0. \tag{8}$$

Denn die alten und die neuen Koordinaten sind durch die Transformationsformeln verknüpft

$$\left.\begin{aligned} \varrho x &= x_0 \bar{x}, \\ \varrho y &= x_0 \bar{y}, \\ \varrho s &= \bar{s}. \end{aligned}\right\} \tag{9a, b c}$$

Die Gleichung (8) geht für $\frac{\varkappa}{x_0^2} = \bar{\varkappa}$ über in die Form

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{\varkappa}\bar{s}^2 = 0, \quad \text{d. h.:} \tag{8'}$$

14. Wird die Strecke $R\bar{E}_1$ der x-Achse, wo der Punkt $\bar{E}_1$ durch die Koordinaten $(x_0, 0, 1)$ festgelegt ist, als neue Einheitsstrecke gewählt, so geht die alte Weltkonstante $-\varkappa$ über in den Wert $-\bar{\varkappa} = -\frac{\varkappa}{x_0^2}$.

Hieraus folgt noch der wichtige Satz:

15. Das Verhältnis der Weltkonstanten zweier verschiedener elliptischer Geometrien ist unabhängig von der für beide gewählten gemeinsamen Einheitsstrecke. Dieses Verhältnis ist also eigentlich die wichtige Zahl, wenn wir zwei verschiedene Geometrien miteinander vergleichen wollen.

Dieser letzte Satz entspricht vergleichsweise der analogen Tatsache, daß auch das Verhältnis der Radien zweier Kreise oder der Krümmungen zweier Kugeln von der gewählten Einheitsstrecke unabhängig ist.

Die analogen Sätze, wie die Sätze 14 und 15, gelten natürlich auch für die sogleich zu betrachtenden verschiedenen hyperbolischen Geometrien, wie wir dann nicht weiter ausführen werden.

Wir wollen noch eine Bemerkung anschließen, wie wir nämlich leicht das absolute Polarsystem der elliptischen Geometrie aus dem gewöhnlichen Polarsystem eines *reellen* Kegelschnittes erhalten können, das ja leichter zu überblicken ist. Wir brauchen nur den reellen Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0 \tag{10}$$

zu Hilfe zu nehmen. Für ihn wird die gewöhnliche Polare zu einem Punkte (x_0, y_0, s_0) durch die Gleichung gegeben

$$x x_0 + y y_0 - \varkappa s s_0 = 0, \tag{11}$$

während die absolute Polare desselben Punktes durch die Gleichung (5) S. 41 bestimmt ist.

Demgemäß gewinnen wir den Satz:

16. Die absolute Polare eines Punktes (x_0, y_0, s_0) gewinnen wir aus der genannten gewöhnlichen Polaren bezüglich des reellen Kegelschnittes (10) *durch die Umwendung um den Koordinatenanfangspunkt.*

§ 13. Das Parallelenaxiom und die hyperbolische Geometrie.

Wir wollen nun die analogen Betrachtungen, wie in den beiden vorhergehenden Paragraphen für die elliptische Geometrie, nunmehr auch für die *hyperbolische Geometrie* durchführen. Doch sind die Verhältnisse hier insofern ganz anders gestaltet, als wir außer den eigentlichen Punkten sowohl unendlich

ferne, wie auch überunendlich ferne Punkte der projektiven Ebene zu betrachten haben. Demgemäß können wir nicht von vornherein z. B. sagen, daß *jeder* (eigentliche oder uneigentliche) Punkt eine bestimmte absolute Polare besitzt. Der Satz 11b S. 14 spricht diese Tatsache ja auch nur für einen *eigentlichen* Punkt aus. Somit werden wir dieser Eigenart der hyperbolischen Geometrie entsprechend ganz anders vorgehen wie soeben in der elliptischen Geometrie, um in voller logischer Klarheit und leichter Anschaulichkeit auch hier erst einmal die verbindende Brücke zwischen projektiver und metrischer Geometrie zu schlagen.

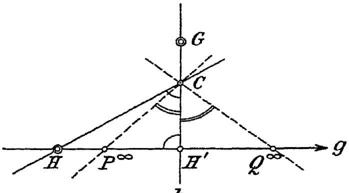


Fig. 55.

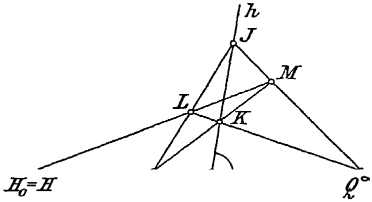


Fig. 56.

Nach dem Satze 5 S. 25 besitzt jetzt jede (eigentliche) Gerade g *zwei unendlich ferne Punkte.* Es sei nun zu einer beliebigen Geraden g eine Senkrechte h mit dem Fußpunkt H' und ihr absoluter Pol H, der Schnittpunkt der Senkrechten in einem beliebigen (eigentlichen) Punkte C von h mit der Geraden g gegeben (Fig. 55). Durch die Umwendung um h geht diese Figur in sich über; doch vertauschen sich die beiden unendlich fernen Punkte P^∞, Q^∞ von g (vgl. den Satz 6 S. 25). Wir fügen noch eine positive Richtung der Geraden g hinzu. Der eine unendlich ferne Punkt P^∞ der Geraden g muß dann auf der Strecke $\overrightarrow{HH'}$, der andere Q^∞ auf der Strecke $\overrightarrow{H'H}$ gelegen sein, d. h.:

1. *Der absolute Pol H jeder eigentlichen Geraden h ist notwendig ein uneigentlicher und zwar ein überunendlich ferner Punkt.*

In der Fig. 55 sind auch die beiden Parallelen CP^∞ und CQ^∞ durch C zu g hinzugefügt. Die Geraden CH' und CH sind ersichtlich die Winkelhalbierenden der von den beiden Parallelen gebildeten Winkel.

Auf jeder eigentlichen Geraden g wollen wir wieder die einander zugeordneten Punkte H, H', wo H' der Fußpunkt einer beliebigen eigentlichen, zu g senkrechten Geraden und H ihr absoluter Pol ist, als *konjugierte Pole* bezeichnen.

Wir wollen nun weiter folgende Fig. 56 konstruiert denken: Es seien wieder g, h zwei eigentliche, zueinander senkrechte Geraden. Auf h nehmen wir zwei beliebige eigentliche Punkte J, K an und ziehen durch diese die beiden Paare von Parallelen zu g mit den unendlich fernen Punkten P^∞, Q^∞. Diese Parallelen

mögen sich noch in den Punkten L, M schneiden. Die Verbindungslinie LM endlich schneide g in H_0.

Durch die Umwendung um h geht die ganze Figur ersichtlich wieder in sich über, da ja die Punkte P^∞ und Q^∞ sich nur vertauschen. Also muß auch der Punkt H_0 in sich übergehen, d. h. es muß H_0 mit dem absoluten Pol H von h identisch sein, nach dem Satze 3 S. 8. Somit gewinnen wir den Satz:

2. *In der hyperbolischen Geometrie sind die beiden unendlich fernen Punkte P^∞, Q^∞ einer eigentlichen Geraden g, der Fußpunkt H' einer beliebigen Senkrechten h und ihr absoluter Pol H stets vier harmonische Punkte* (vgl. den Satz 6 S. 8; auch haben wir ja die Figur des vollständigen Vierecks $MJLK$ vor uns).

Es gilt aber ersichtlich auch die Umkehrung:

3. *Ist auf einer eigentlichen Geraden g mit den unendlich fernen Punkten P^∞, Q^∞ ein überunendlich ferner Punkt H gegeben und ist H' der vierte harmonische Punkt zu P^∞, Q^∞, H, so ist der Punkt H der absolute Pol für die Senkrechte zu g in dem (stets eigentlichen) Punkte H'.*

Aus dem Satze 2 folgt ferner sogleich auch:

4. *Auf jeder eigentlichen Geraden g bilden die konjugierten Pole H, H' eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte die unendlich fernen Punkte P^∞, Q^∞ von g sind* (vgl. den Satz 6 im Bd. I S. 149).

Eine Folgerung dieses Satzes ist der folgende Satz, der dem Satze 9 S. 35 der elliptischen Geometrie gegenübersteht:

5. *In der hyperbolischen Geometrie trennen sich auf einer (eigentlichen) Geraden g irgend zwei Paare konjugierter Pole A, A' und B, B' nicht voneinander.*

Wir gehen nun weiter wieder aus von zwei zueinander senkrechten eigentlichen Geraden g, h mit ihrem Schnittpunkt, dem eigentlichen Punkte F, und den absoluten Polen G, H bzw. auf h, g (Fig. 57). Wir blicken jetzt auf den Satz 3 S. 8 zurück, dem gemäß bei der Umwendung um g (oder h) nur die Punkte der Umwendungsachse selbst und der absolute Pol unverändert bleiben.

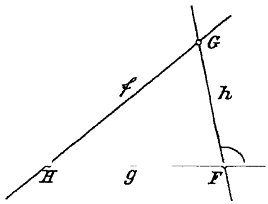


Fig. 57.

Wir betrachten auch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ um g, h. Wir wissen von früher (§ 6, S. 12):

Die Aufeinanderfolge $\mathfrak{G}\mathfrak{H}$ der Umwendungen um die beiden zueinander senkrechten eigentlichen Geraden g, h ist gleichwertig mit der Umwendung $\mathfrak{A}$ um ihren Schnittpunkt F (Fig. 57; vgl. den Satz 4 S. 34 der elliptischen Geometrie).

Bei dieser Umwendung $\mathfrak{A}$ bleiben nur der Punkt F und die Punkte der Geraden GH unverändert.

Schon im Satze 10 der S. 14 haben wir erkannt:

6. *Alle Geraden durch den eigentlichen Punkt F haben ihren absoluten Pol auf der Verbindungslinie GH oder f.*

Wir wollen diesen Satz jetzt, wie folgt, vervollständigen: Es sei eine beliebige Gerade a durch F gelegt (Fig. 58). Wir tragen dann von F aus zwei gleiche Strecken beiderseits bis B, C ab. Die Senkrechten in B, C auf a bestimmen dann mit ihrem Schnittpunkt A den absoluten Pol von a. (Auch die Gerade AF steht natürlich auf a senkrecht.) Durch die Umwendung um F geht aber ersichtlich A in sich über. Folglich muß A auf GH liegen.

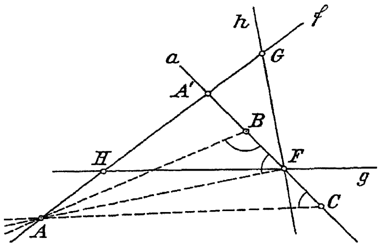


Fig. 58.

Hieraus folgt aber weiter, da ja auch A ein überunendlich ferner Punkt sein muß (nach dem Satze 1):

7. *Alle Punkte der Geraden GH sind überunendlich ferne Punkte.* Es gibt also in der hyperbolischen Ebene Geraden, die keinen eigentlichen oder unendlich fernen Punkt besitzen.

Nun können wir folgende Erweiterung der Definitionen 1 S. 6 und 1 S. 8 aufstellen:

8. *Wir können die Umwendung $\mathfrak{A}$ um F auch als die Umwendung $\mathfrak{F}$ um die Gerade GH bezeichnen und F als den absoluten Pol zu GH.*

Ferner können wir das Dreieck FGH wieder ein *absolutes Polardreieck* nennen. Es gilt dann ersichtlich auch der Satz:

9. *Die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}$ um die Geraden g, h, f ergibt die Identität* (vgl. den Satz 5 S. 34 der elliptischen Geometrie).

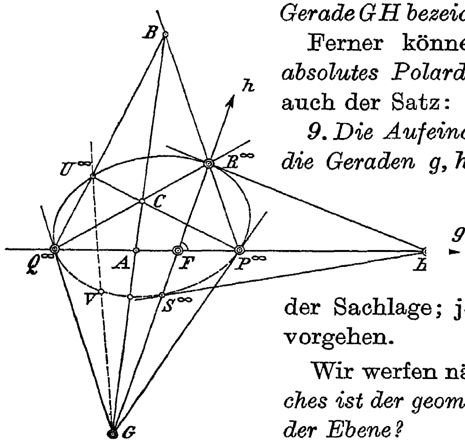


Fig. 59.

Alle bisherigen Betrachtungen dieses Paragraphen sind aber gleichsam nur Vorpostenerkundigungen zur Klärung der Sachlage; jetzt aber wollen wir mit ganzer Macht vorgehen.

Wir werfen nämlich nun die wichtige Frage auf: *Welches ist der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte der Ebene?*

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir aus von einer beliebigen eigentlichen Geraden g mit den unendlich fernen Punkten P^∞, Q^∞ (Fig. 59). Wir fügen eine positive Richtung der Geraden so hinzu, daß die

Strecke $\overrightarrow{Q^\infty P^\infty}$ die eigentlichen Punkte enthält. Es sei ferner G der absolute Pol von g. Wir verbinden nun G mit einem eigentlichen Punkte F von g. Es seien R^∞ und S^∞ die beiden unendlich fernen Punkte von FG, und die Strecke $\overrightarrow{S^\infty R^\infty}$ bei entsprechender Annahme einer positiven Richtung von h sei wieder die eigentliche Strecke. (Wir haben also, kurz gesagt, als Ausgangspunkt unserer Überlegung zwei zueinander senkrechte eigentliche Geraden g, h gewählt, wobei auch der Pol H von h auf g liegt und zwar als der vierte harmonische Punkt zu P^∞, Q^∞ und F, ebenso wie G der vierte harmonische Punkt zu R^∞, S^∞ und F ist.) Wir verbinden weiter R^∞ mit P^∞ und Q^∞. Nun verbinden wir G mit einem neuen eigentlichen Punkte A von g; es seien B, C die Schnittpunkte von GA mit $P^\infty R^\infty$ und $Q^\infty R^\infty$. *Wir behaupten dann, daß auch der Schnittpunkt U von $P^\infty C$ und $Q^\infty B$ ein unendlich ferner Punkt ist.*

Durch Umwendung um die eigentliche Gerade GA, die ja zu g senkrecht steht, gehen nämlich die Punkte P^∞, Q^∞ wechselseitig ineinander über, während die Punkte B, C unverändert bleiben. Also muß auch der Punkt R^∞ in den Punkt U übergehen, d. h. es ist auch U ein unendlich ferner Punkt (so daß wir nunmehr ihn mit U^∞ bezeichnen können), und zwar auf der aus GR^∞ hervorgegangenen Geraden GU^∞ (vgl. den Satz 6 S. 25). In dieser Figur 59 erkennen wir aber sofort die Figur der projektiven Erzeugung eines Kegelschnittes wieder, der durch die drei Punkte P^∞, Q^∞, R^∞ und die Tangenten $P^\infty G$ und $Q^\infty G$ bestimmt ist (vgl. Bd. I S. 170). Somit gewinnen wir zunächst das Resultat: *Für alle Punkte A innerhalb der Strecke $\overrightarrow{Q^\infty P^\infty}$ liegen die nach der angegebenen Konstruktion gefundenen unendlich fernen Punkte U^∞ auf dem einteiligen Kegelschnitt, der durch die drei Punkte P^∞, Q^∞, R^∞ und die Tangenten $P^\infty G$, $Q^\infty G$ bestimmt ist.*

Denken wir auf der Geraden g ein λ-Abszissensystem so bestimmt, daß die Punkte Q^∞, P^∞ und F die Abszissen $0, \infty, 1$ besitzen und A die Abszisse λ, so ist ja

$$\lambda = (\infty\, 0\, 1\, \lambda) = (P^\infty Q^\infty F A).$$

Dieses Abszissensystem können wir durch Projektion von G aus auf die Geraden $P^\infty R^\infty$ und $Q^\infty R^\infty$ übertragen und von dort bzw. auf die Strahlenbüschel (Q^∞) und (P^∞). Die demselben Strahl GA entsprechenden Strahlen $P^\infty C$ und $Q^\infty B$ haben ebenfalls dieselbe Abszisse λ, die wir dann endlich als Kote λ auf den Kegelschnittspunkt U^∞ übertragen können (vgl. den § 26 im Bd. I S. 174). Wir können somit auch sagen:

Durch unsere bisherige Konstruktion erhalten wir alle Kegelschnittspunkte mit positiven Koten λ.

Es liegt nun auch der zweite unendlich ferne Punkt S^∞ der Geraden h oder FR^∞ auf dem Kegelschnitt, da G ersichtlich der gewöhnliche Pol zur Geraden

$P^\infty Q^\infty$ bezüglich des Kegelschnittes und S^∞ der vierte harmonische Punkt zu F, G und R^∞ ist (Fig. 60).

Wir ziehen dann analog wie soeben die Verbindungslinien $P^\infty S^\infty$ und $Q^\infty S^\infty$ und auch durch G wieder die Verbindungslinie mit dem beliebigen eigentlichen Punkt A von $P^\infty Q^\infty$. Diese Verbindungslinie schneide die Geraden $P^\infty S^\infty$ und $Q^\infty S^\infty$ in den Punkten B_0 und C_0; durch deren Verbindung bzw. mit Q^∞ und P^∞ ergibt sich der Schnittpunkt V. Ganz wie soeben erkennen wir: Durch die Umwendung um die Gerade GA geht der Punkt S^∞ in den Punkt V über; also ist auch der Punkt V ein unendlich ferner Punkt und kann demnach mit V^∞ bezeichnet werden. *Zugleich ist dieser Punkt V^∞ aber wieder ein Punkt des bereits bestimmten Kegelschnittes.*

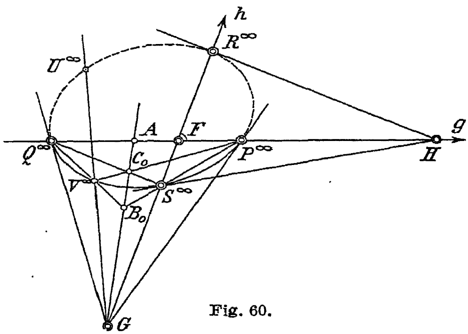


Fig. 60.

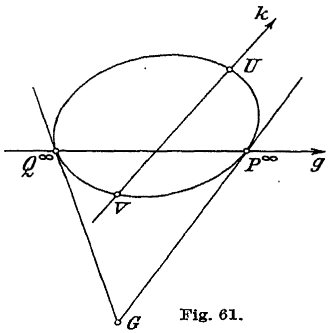


Fig. 61.

Noch einfacher hätten wir hinsichtlich des Punktes V^∞ des Kegelschnittes auch so vorgehen können, daß wir die Fig. 59 S. 46 der Umwendung um die Gerade $P^\infty Q^\infty$ unterwerfen. Dann geht ja der Kegelschnitt in sich über und jeder Punkt U^∞ in den zweiten unendlich fernen Punkt V^∞ der Geraden GU^∞. Dem Punkt V^∞ haben wir daher auch die entgegengesetzte Kote $\bar{\lambda} = -\lambda$ zuzuordnen wie dem zugehörigen Punkte U^∞. *Die Gesamtheit aller Punkte V^∞ umfaßt also alle Kegelschnittspunkte mit negativer Kote.*

Somit haben wir als einen ersten Teil der Beantwortung unserer Frage auf S. 46 das wichtige Resultat gewonnen:

10. Der geometrische Ort aller unendlich fernen Punkte für alle durch den Punkt G gehenden Geraden mit einem e i g e n t l i c h e n Schnittpunkte auf $P^\infty Q^\infty$ ist ein bestimmter einteiliger Kegelschnitt, den wir den absoluten Kegelschnitt nennen wollen. Dieser Kegelschnitt ist durch die drei Punkte P^∞, Q^∞, R^∞ und die beiden Tangenten $P^\infty G$, $Q^\infty G$, wobei G der absolute Pol von $P^\infty Q^\infty$ ist, bereits eindeutig bestimmt.

Wir werden nun noch zu dem weiteren Nachweis übergehen, daß *auch für j e d e b e l i e b i g e a n d e r e eigentliche Gerade ihre unendlich fernen Punkte auf die-*

sem absoluten Kegelschnitt gelegen sind. Jedenfalls haben wir alle inneren Punkte des absoluten Kegelschnittes als eigentliche Punkte anzusprechen.

Es sei nun eine *beliebige* Gerade k, welche den absoluten Kegelschnitt in den reellen Punkten U, V schneidet, gegeben (Fig. 61) und auf dieser Geraden eine positive Richtung so, daß die Strecke $\overrightarrow{VU}$ dem Kegelschnittsinneren angehört, also aus eigentlichen Punkten besteht. Dann müßten die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden k entweder mit U, V zusammenfallen oder es müßte wenigstens einer von ihnen auf der Strecke $\overrightarrow{UV}$ gelegen sein. Letzteres ist aber nicht möglich. Denn wäre etwa U kein unendlich ferner Punkt von k, so sei T^∞ der erste unendlich ferne Punkt von k in der Richtung $\overrightarrow{VU}$ über U hinaus. Dann aber müßten ja alle inneren Punkte der Strecke $\overrightarrow{VT^\infty}$ eigentliche Punkte sein, also auch der Punkt U selbst, was doch nicht der Fall ist. Also sind die Schnittpunkte U, V der Geraden k mit dem absoluten Kegelschnitt auch die unendlich fernen Punkte von k.

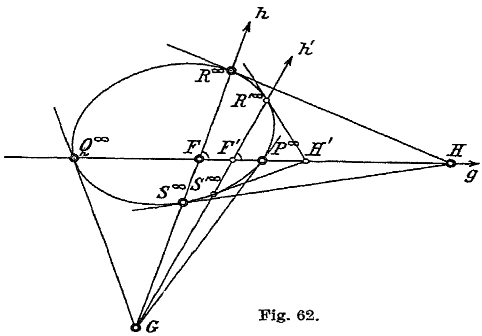


Fig. 62.

Wenn wir wollen, können wir aber noch, wie folgt, einen tieferen, anschaulichen Einblick in diese Verhältnisse gewinnen. In der Fig. 59 S. 46 gehen ja auch die Tangenten der Punkte R^∞, S^∞ durch den absoluten Pol H von h (d. h. durch den vierten harmonischen Punkt zu P^∞, Q^∞ und F). Also sind die beiden Geraden g, h mit ihren absoluten Polen G, H, die wir als Ausgangspunkt unserer Betrachtung gewählt haben, völlig gleichwertig, d. h.:

11. Auch alle Geraden durch H, welche die eigentliche Strecke $R^\infty S^\infty$ innerlich schneiden, haben ihre unendlich fernen Punkte auf demselben Kegelschnitt, der ja ebenfalls durch die Punkte R^∞, S^∞ mit ihren Tangenten und den dritten Punkt P^∞ oder Q^∞ eindeutig bestimmt ist (Fig. 62).

Ebenso kann die Gerade h durch eine beliebige Gerade h' durch G ersetzt werden, welche die Strecke $\overrightarrow{Q^\infty P^\infty}$ innerlich schneidet (Fig. 62) (oder auch die Gerade g durch eine Gerade g' durch H, welche die Strecke $\overrightarrow{S^\infty R^\infty}$ innerlich schneidet). Die Tangenten in den Kegelschnittspunkten R'^∞, S'^∞ einer solchen Geraden h', d. h. in den unendlich fernen Punkten von h', gehen ja auch durch den absoluten Pol H' von h', der auf g gelegen ist.

12. Wieder werden für alle Geraden durch H', welche innere Punkte des abso-

luten Kegelschnittes besitzen, ihre unendlich fernen Punkte auf demselben Kegelschnitt liegen.

Es sei jetzt wieder eine beliebige Gerade k gegeben, welche eine innerhalb des Kegelschnittes gelegene Strecke LM besitzt. Wenn diese etwa die Strecke $\overrightarrow{P^\infty Q^\infty}$ innerlich in einem Punkte H' schneidet (Fig. 63), so können wir ja h durch die Polare h' von H' ersetzt denken. Und dann haben wir ja soeben erkannt, daß die unendlich fernen Punkte von k auch auf demselben absoluten Kegelschnitt liegen müssen. Wenn aber eine solche (von h verschiedene) Gerade k die Strecke $\overrightarrow{P^\infty Q^\infty}$ nicht innerlich schneidet, vielmehr die Strecke $\overrightarrow{Q^\infty P^\infty}$ (Fig. 64), dann können wir doch zunächst die Gerade g immer durch eine andere Gerade g' durch H ersetzt denken, welche von der Geraden k außerhalb des Kegelschnittes im Punkte H' geschnitten wird, und auch die Gerade h durch die Polare h' von H' und darauf dieselbe Schlußfolgerung wie soeben durchführen. Immer ergibt sich das Resultat:

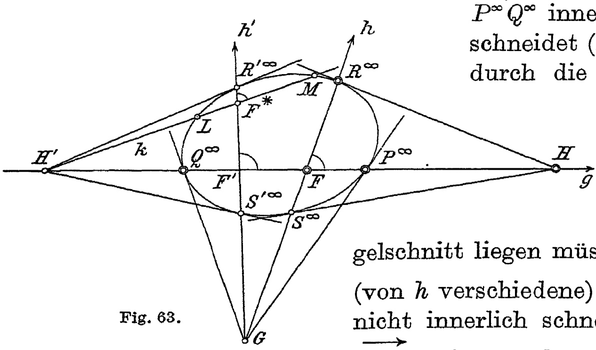


Fig. 63.

13. Die unendlich fernen Punkte jeder beliebigen, den absoluten Kegelschnitt reell schneidenden Geraden k liegen auch stets auf diesem Kegelschnitt.

Auch ist in ähnlicher Weise leicht zu zeigen:

14. Wenn eine beliebige Gerade k den absoluten Kegelschnitt nicht schneidet, so hat sie nur überunendlich ferne Punkte. Jeder ihrer Punkte ist ja der absolute Pol einer den Kegelschnitt schneidenden Geraden (vgl. den Satz 1 S. 44 sowie den Satz 7 S. 46).

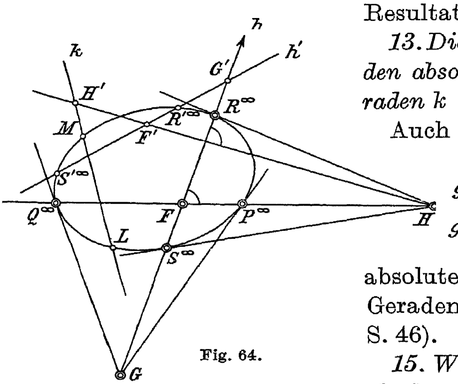


Fig. 64.

15. Wenn endlich eine beliebige Gerade k den absoluten Kegelschnitt berührt, so ist der Berührungspunkt ein unendlich ferner, alle übrigen Punkte der Geraden k sind aber überunendlich ferne Punkte.

16. Wir haben also die Punkte der projektiven Ebene in eigentliche (d. h. die im Innern des absoluten Kegelschnittes gelegenen) und in uneigentliche Punkte und letztere in unendlich ferne und überunendlich ferne, d. h. in die Kegelschnitts-

punkte und in die im Äußeren des Kegelschnittes gelegenen Punkte zu scheiden. (Vgl. die Ausführungen des § 4 S. 29 im Bd. I, insbesondere die Übersicht S. 34 daselbst.)

Analog können wir auch nun sogleich eine Einteilung aller Geraden der projektiven Ebene vornehmen:

17. Und zwar wollen wir die Geraden scheiden in eigentliche Geraden, d. h. die Geraden, die den absoluten Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneiden und also auch eine Strecke mit eigentlichen Punkten besitzen, und in uneigentliche Geraden. Letztere seien aber wieder in unendlich ferne Geraden und in überunendlich ferne Geraden geschieden, d. h. in die Tangenten des Kegelschnittes, die doch einen unendlich fernen Punkt, aber keinen eigentlichen Punkt haben, und in die den Kegelschnitt nicht reell schneidenden Geraden, die nur überunendlich ferne Punkte besitzen. (Vgl. die Übersicht im Bd. I § 4 auf S. 41.)

Der absolute Kegelschnitt trennt alle eigentlichen Punkte von den überunendlich fernen und im gewissen Sinne alle eigentlichen Geraden von allen überunendlich fernen Geraden.

Somit gewinnen wir endlich auch einen klaren Überblick über das gesamte *absolute Polarsystem.* Es sollen jetzt eben in Übereinstimmung mit allen bisher getroffenen speziellen Definitionen die allgemeinen *Definitionen* gelten:

18. Der absolute Pol G einer beliebigen, eigentlichen oder uneigentlichen Geraden g ist stets ihr Pol bezüglich des absoluten Kegelschnittes.

19. Die absolute Polare g eines beliebigen, eigentlichen oder uneigentlichen Punktes G ist stets ihre Polare bezüglich des absoluten Kegelschnittes.

20. Jeder unendlich fernen Geraden insbesondere entspricht hiernach ihr Berührungspunkt mit dem absoluten Kegelschnitt als ihr absoluter Pol und jedem unendlich fernen Punkt die Tangente des absoluten Kegelschnittes als seine absolute Polare.

§ 14. Festlegung des hyperbolischen absoluten Polarsystems durch eine Gleichung.

Es gilt jetzt, auch für die hyperbolische Geometrie das absolute Polarsystem durch eine Gleichung festzulegen.

1. Dieses hyperbolische absolute Polarsystem in der projektiven Ebene ist wieder bestimmt, wenn wir zu vier Punkten P, Q, R, E, von denen nicht drei in einer Geraden liegen, die absoluten Polaren p, q, r, e kennen (vgl. den Satz 3 S. 38).

Wir müssen nun hier die Betrachtungen der S. 37 ff. sinngemäß auf die hyperbolische Geometrie übertragen.

Wir wählen natürlich für unsere weitere Betrachtung wieder ein beliebiges absolutes Polardreieck PQR (mit dem eigentlichen, als Anfangspunkt gewähl-

ten Punkte R und den überunendlich fernen Punkten P, Q) aus, welches das Fundamentaldreieck für das einzuführende projektive Koordinatensystem sein soll (Fig. 65). Als Einheitspunkt sei ein zunächst noch beliebig gewählter eigentlicher Punkt E hinzugenommen, der natürlich nicht auf einer der Seitengeraden des Dreiecks liegen soll. Es seien E_1 und E_2 die (eigentliche Punkte darstellenden) Schnittpunkte von QE und PE bzw. mit q, p. Es ist dann ja auch $QE_1 \perp x$, $PE_2 \perp y$. Die positiven Richtungen der x, y-Achsen sind dadurch gegeben, daß E_1, E_2 auf $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$ liegen sollen.

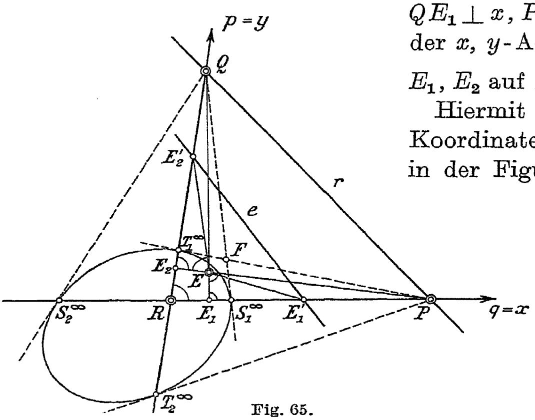


Fig. 65.

Hiermit ist erst einmal das projektive Koordinatensystem festgelegt. Wir nehmen in der Figur weiter sogleich die unendlich fernen Punkte S_1^∞, S_2^∞ der x-Achse und die unendlich fernen Punkte T_1^∞, T_2^∞ der y-Achse hinzu. Es muß ja S_1^∞ auf der Strecke $\overrightarrow{E_1P}$ und S_2^∞ auf der Strecke $\overrightarrow{PR}$ gelegen sein. Analoges gilt für die Punkte T_1^∞, T_2^∞. Wir denken nun noch die absolute Polare e zu E, wie folgt, konstruiert: Wir errichten in E auf QE_1 die Senkrechte mit dem Schnitt E_1' auf der x-Achse und die Senkrechte in E auf PE_2 mit dem Schnitt E_2' auf der y-Achse. Dann ist E_1' der absolute Pol zu QE_1 und E_2' der absolute Pol zu PE_2, d. h. die Punkte E_1' und E_2' sind überunendlich ferne Punkte. Die Punkte E_1, E_1' werden dann nach dem Satze 5 S. 45 nicht durch die Punkte P, R getrennt, ebenso die Punkte E_2, E_2' nicht durch die Punkte Q, R. D. h.: Es muß der überunendlich ferne Punkt E_1' auf der Strecke $\overrightarrow{S_1^\infty P}$ und der überunendlich ferne Punkt E_2' auf der Strecke $T_1^\infty Q$ liegen.

Die Gerade $E_1'E_2' = e$ ist dann die absolute Polare zum Punkte E. Durch die vier Punkte P, Q, R, E und ihre absoluten Polaren ist nun also die Verwandtschaft des absoluten Polarsystems eindeutig festgelegt.

Wir nehmen jetzt wieder zur Vereinfachung der Betrachtung an, daß der Punkt E auf der einen Winkelhalbierenden der von den x, y-Achsen gebildeten Winkel gelegen ist, also auch $\overrightarrow{RE_1} = \overrightarrow{RE_2}$ ist. Dann geht ersichtlich die ganze Figur durch Umwendung um die Gerade RE in sich über, also vertauschen sich hierbei auch die Punkte E_1', E_2' wechselseitig.

Nebenbei sei bemerkt, wie sich aus der Figur unmittelbar ergibt:

2. Der konkave Winkel $E_1\hat{E}E_2$ ist stets ein spitzer Winkel (vgl. den Satz 6 S. 40).

Wir wollen jetzt annehmen, daß die Punkte E_1', E_2' die Abszisse $\frac{x}{s} = \varkappa$ bzw. die Ordinate $\frac{y}{s} = \varkappa$ besitzen, wo $\varkappa$ eine bestimmte positive (übrigens sehr große) Zahl sei.

3. *Die Zahl $\varkappa$ legt wieder gleichsam fest, wie stark das hyperbolische Parallelenaxiom von dem euklidischen abweichen soll.*

Dementsprechend stellen wir folgendes *Axiom* auf:

4. Axiom der Weltkonstante $+\varkappa$ in der hyperbolischen Geometrie (Fig. 66): *Es seien zwei Senkrechte q, p mit ihrem eigentlichen Schnittpunkt R angenommen, auf ihnen von R aus in positiven Richtungen die Einheitsstrecken RE_1, RE_2 abgetragen und in E_1 bzw. E_2 die Senkrechte auf q bzw. p errichtet mit dem Schnittpunkt E, wobei E ein eigentlicher Punkt (auf der Winkelhalbierenden der von den positiven Richtungen p, q gebildeten Winkel) sei, was bei hinreichend kleiner Wahl der Einheitsstrecke stets der Fall ist. Der Schnittpunkt P von q und EE_2 ist dann der absolute Pol von p. Es sei dann noch auf der Geraden q ein projektives Abszissensystem konstruiert, in dem die Punkte R, E_1, P die Abszissen $0, 1, \infty$ besitzen. Dann soll der Schnittpunkt E_1' von q mit der Senkrechten in E auf EE_1 die Abszisse $\varkappa$ besitzen, wo $\varkappa$ eine bestimmte positive sehr große Zahl sei, oder mit anderen Worten: Es soll das Doppelverhältnis $(PRE_1E_1') = \varkappa$ sein.* (Vgl. das Axiom 9 S. 40.)

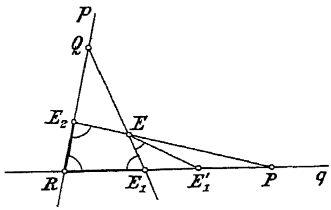


Fig. 66.

Es gilt weiter:

5. *Die Gerade e, die absolute Polare des Einheitspunktes E, hat nun ersichtlich die Gleichung*

$$x + y - \varkappa s = 0, \tag{1}$$

da diese Gerade ja durch die Punkte $E_1' = (\varkappa, 0, 1)$ und $E_2' = (0, \varkappa, 1)$ bestimmt ist.

6. *Unser absolutes Polarsystem in der hyperbolischen Geometrie aber wird durch die Gleichung*

$$x x_0 + y y_0 - \varkappa s s_0 = 0 \tag{2}$$

festgelegt oder durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varrho u &= x_0, \\ \varrho v &= y_0, \\ \varrho t &= -\varkappa s_0, \end{aligned}\right\} \tag{3a, b, c}$$

wo u, v, t die Linienkoordinaten der absoluten Polaren zu dem Pol (x_0, y_0, s_0) sind (vgl. den Satz 11 S. 41).

7. Die Gleichung des (einteiligen) absoluten Kegelschnittes lautet demnach

$$x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0. \tag{4}$$

8. Die unendlich fernen Punkte S_1^∞, S_2^∞ der x-Achse (Fig. 65 S. 52) *haben also* (als Doppelpunkte der hyperbolischen Involution der konjugierten absoluten Pole) *die* (unhomogenen) *Abszissen*

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\varkappa}, \tag{5a, b}$$

analog die unendlich fernen Punkte T_1^∞, T_2^∞ der *y-Achse die Ordinaten*

$$y_{1,2} = \pm \sqrt{\varkappa}. \tag{6a, b}$$

Würden wir ein neues Koordinatensystem einführen, dessen Fundamentaldreieck wieder PQR ist, dessen Einheitspunkt aber der Schnittpunkt F der Geraden PT_1^∞, QS_1^∞ ist, so lautet die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in diesem neuen Koordinatensystem

$$X^2 + Y^2 - S^2 = 0. \tag{7}$$

Denn die Transformationsformeln für den Übergang zwischen den beiden Koordinatensystemen lauten

$$\left.\begin{aligned} \varrho X &= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, x, \\ \varrho Y &= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, y, \\ \varrho S &= s. \end{aligned}\right\} \tag{8a, b, c}$$

Der Punkt E hat demgemäß die neuen Koordinaten $\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}, \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}, 1\right)$.

Würden wir endlich, an die Fig. 59 S. 46 anknüpfend, als Fundamentaldreieck des projektiven Koordinatensystems das Dreieck $GP^\infty Q^\infty$ einführen mit dem Anfangspunkt G und dem Einheitspunkt R^∞ (oder S^∞), so lautet die Gleichung des absoluten Kegelschnittes (vgl. Bd. I § 24 S. 163) in diesem $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystem

$$\bar{x}\bar{y} - \bar{s}^2 = 0. \tag{9}$$

Wir werden natürlich späterhin stets die Gleichung (4) des absoluten Kegelschnittes bevorzugen, schon wegen der Analogie mit der Gleichung (7) S. 42 der elliptischen Geometrie.[1])

1) Das absolute Polarsystem und der absolute Kegelschnitt sind ja allbekannt (vgl. z. B. B. Pasch, a. a. O. 1926, § 20, insbesondere aber in dem Anhang von M. Dehn, S. 209ff., sowie auch R. Bonola, S. 167). Noch niemals aber dürfte der absolute Kegelschnitt durch so überraschend einfache und anschauliche Überlegungen gewonnen sein, wie sie uns zu dem Satze 11 S. 41 zu dem wichtigen Satze 10 S. 48 und seinen Folgerungen, insbesondere zu dem Satze 7 S. 54, also bis zur Aufstellung der Gleichung des einen

Wir wollen nun jedoch noch eine Bemerkung hinzufügen, die in analoger Weise für die elliptische Geometrie gilt. Wir knüpfen an das Axiom der Weltkonstante $\varkappa$ im Satze 4 S. 53 an. Wenn wir nämlich den Aufbau der Fig. 65, der zu der Gleichung (1) des absoluten Kegelschnittes hinführte, noch einmal überblicken, so werden wir bemerken:

9. Der absolute Kegelschnitt wird im Grunde durch fünf neue Axiome festgelegt, von denen das Axiom der Weltkonstante $\varkappa$ allerdings von wesentlicher Bedeutung ist („fünf Axiome zur Festlegung des absoluten Kegelschnittes").

Wir haben uns nämlich den Aufbau der Fig. 65 genauer wie folgt zu denken: Wir nehmen zunächst in der projektiven Ebene ein *beliebiges* projektives (x^*, y^*, s^*)-Koordinatensystem an, dessen Anfangspunkt in dem etwa gegebenen begrenzten Gebiet gelegen sein mag. Das *erste* Axiom zur Festlegung des absoluten Kegelschnittes betrifft die Festlegung des rechten Winkels $P\widehat{R}Q$ der Fig. 65. Die Gerade RP kann noch beliebig gewählt werden mit dem Punkte R auf ihr, der auch im begrenzten Gebiet liegen mag und durch seine Koordinaten (x_0^*, y_0^*, s_0^*) gegeben sei. Das *erste* Axiom besagt dann: *Die Senkrechte zur Geraden RP im Punkte R (d. h. die Gleichheit der Nebenwinkel im Punkte R) soll durch ihre bestimmten Linienkoordinaten (u_0^*, v_0^*, s_0^*) festgelegt sein.*

Sodann können wir die gewählte Einheitsstrecke auf RP von R aus bis E_1 abgetragen denken. Die Einheitsstrecke ist dann festgelegt durch die Koordinaten (x^*, y^*, s^*) des Punktes E_1. Das *zweite* Axiom lautet dann: *Der Endpunkt E_2 der auf RQ von R aus abgetragenen Einheitsstrecke, d. h. der der Strecke RE_1 gleichen Strecke, soll durch bestimmte Koordinaten (x^*, y^*, s^*) festgelegt sein.* (Hierbei können wir uns denken, daß mit einem Zirkel die Strecke RE_1 zunächst nach RE_2 abgetragen sei, der hierdurch erhaltene Zirkelstich E_2 jedoch durch das zweite Axiom genau festgelegt werde.)

Sodann sei (durch ein geeignetes Winkelübertragungsinstrument) der rechte Winkel in R in den rechten Winkel in E_1 und in den rechten Winkel in E_2 der

oder anderen absoluten Kegelschnittes hingeführt haben. Unsere Darstellung in den §§ 10—14 bildet gleichsam die wünschenswerte wichtige Brücke zwischen den elementaren Entwicklungen der hyperbolischen Geometrie, wie sie von den beiden Bolyai und von Lobatschefskij in euklidischer Methode durchgeführt sind, und der genialen projektiven Darstellung der nichteuklidischen Geometrie, wie sie von F. Klein im Anschluß an ganz abstrakte Betrachtungen von Cayley geschaffen ist. Doch tritt bei F. Klein der eine oder andere absolute Kegelschnitt mehr oder weniger unvermittelt, gleichsam als ein deus ex machina, in die Betrachtung ein, eben als gleichberechtigte projektive Möglichkeit neben den imaginären Kreispunkten bzw. dem imaginären Kugelkreis der euklidischen Geometrie, vgl. deswegen z. B.: F. Klein, Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 163ff. sowie auch S. 205ff.

Fig. 65 übertragen, nun aber durch das *dritte* und *vierte* Axiom der freie Schenkel E_1Q und der freie Schenkel E_2P mit seinen bestimmten Linienkoordinaten (u^*, v^*, t^*) oder mit den (x^*, y^*, s^*)-Koordinaten der Punkte Q und P festgelegt. Durch die nunmehr im alten (x^*, y^*, s^*) - Koordinatensystem festgelegten Punkte P, Q, R, E ist dann auch das neue (x, y, s) - Koordinatensystem gegeben. Durch das *fünfte* Axiom, eben das Axiom des Satzes 4, ist dann endlich der rechte Winkel $E_1\hat{E}E_1'$ durch die Abszisse $x = \varkappa$ des Punktes E_1' festgelegt.

Diese Gesamtheit von „fünf Axiomen zur Festlegung des absoluten Kegelschnittes", in die natürlich das Parallelenaxiom eingeschlossen ist, entspricht durchaus der Tatsache:

10. Es sind in unserer projektiven Ebene ∞^5 verschiedene hyperbolische Geometrien möglich, ebenso ∞^5 verschiedene elliptische Geometrien, doch nur ∞^4 verschiedene euklidische Geometrien. Für jede der euklidischen Geometrien ist ja stets $\varkappa = \infty$.

Nun wollen wir jedoch noch darauf hinweisen, daß die Festlegung des absoluten Kegelschnittes noch auf andere Weisen möglich ist. Ganz allgemein könnten wir die hierzu notwendigen, durch entsprechende fünf Axiome zu gewinnenden fünf Gleichungen, wie folgt, erhalten:

In dem ursprünglichen (x^*, y^*, s^*)- Koordinatensystem denken wir, etwa in dem begrenzten Gebiet, durch Abtragen mit dem Zirkel fünf Paare einander gleicher Strecken oder sechs einander gleiche Strecken durch die Zirkelstiche zunächst anschaulich angenähert, dann aber durch Angabe der (x^*, y^*, s^*)-Koordinaten für die Endpunkte der Strecken genau festgelegt. Oder aber, wir denken durch Abtragen mit einem Winkelübertragungsinstrument fünf Paare einander gleicher Winkel oder sechs einander gleiche Winkel zunächst anschaulich angenähert, dann aber durch Angabe der (u^*, v^*, t^*) - Koordinaten ihrer Schenkel genau festgelegt.

Statt der Festlegung von sechs einander gleichen Winkeln können wir natürlich auch die Festlegung von fünf rechten Winkeln wählen, wobei ja jeder Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist (oder analog z. B. bei der elliptischen Geometrie die Festlegung von fünf Strecken, welche je die Hälfte ihrer Geraden darstellen). Auch können beliebige fünf Zusammenstellungen von gleichen Streckenpaaren und gleichen Winkelpaaren gewählt werden. Alle diese allgemeinen Möglichkeiten der Festlegung des absoluten Kegelschnittes wollen wir jedoch nicht weiter verfolgen. Nur auf zwei einfache spezielle Möglichkeiten sei noch in Kürze hingewiesen, wobei indes die genaue Darlegung der Verhältnisse am einfachsten bereits die im V. Abschnitt behandelte Theorie der Kreise in den drei Geometrien benutzt:

Auf drei durch denselben (eigentlichen) Punkt R gehenden Geraden g, g_1, g_2

sei die als Einheitsstrecke gewählte Strecke bzw. drei-, zwei- oder einmal von R aus im begrenzten Gebiet abgetragen. (Es sei also $RA = AB = BC = RA_1 = A_1B_1 = RA_2$, und alle hier vorkommenden Punkte seien durch ihre Koordinaten in einem (x^*, y^*, s^*)-System festgelegt, Fig. 67.) In betreff der hierdurch gewonnenen Festlegung des absoluten Kegelschnittes sei nur noch folgendes angedeutet: Auf der Geraden g ist hiermit eine Bewegung festgelegt, welche die Punkte R, A, B in die Punkte A, B, C überführt. Diese Bewegung hat entweder einen reellen, zwei getrennte reelle oder zwei konjugiert-imaginäre, sich selbst entsprechende, d. h. festliegende Punkte. Hieraus folgt bereits: Dementsprechend gilt in der projektiven Ebene bzw. die euklidische, hyperbolische oder elliptische Geometrie. Es seien z. B. im Falle der *hyperbolischen* Geometrie (Fig. 68) die nun durch ihre (x^*, y^*, s^*)-Koordinaten bestimmten festen Punkte die metrisch unendlich fernen Punkte, S_1^∞, S_2^∞. Dann sei ferner der Punkt P (mit ebenfalls bestimmten Koordinaten) der vierte harmonische Punkt zu den Punkten $S_1^\infty, S_2^\infty, R$ und der Punkt E_1' der vierte harmonische Punkt zu den Punkten S_1^∞, S_2^∞ und $A = E_1$ (vgl. die Fig. 65 S. 52). In dem neuen Abszissensystem auf g, in dem die Punkte R, A, P die Abszissen $0, 1, \infty$ haben, möge dann der Punkt E_1' die Abszisse $+\varkappa$ haben. Hierdurch ist dann also die Weltkonstante $+\varkappa$ bereits festgelegt. Durch die Bewegung, welche die Punkte R, A, B von g in die Punkte R, A_1, B_1 von g_1 überführt, d. h. die hierdurch bestimmte projektive Beziehung der Geraden g auf die Gerade g_1, gehen dann die Punkte S_1^∞, S_2^∞ in die unendlich fernen Punkte U_1^∞, U_2^∞ und der Punkt P in den Punkt T auf g_1 über. Hiermit sind von dem absoluten Kegelschnitt bereits die vier Punkte $S_1^\infty, S_2^\infty, U_1^\infty, U_2^\infty$ bestimmt. Führen wir ein neues $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s})$-Koordinatensystem ein, dessen Fundamentaldreieck das Dreieck RPT und dessen Einheitspunkt etwa der Schnittpunkt von AT und A_1P ist, so lautet die Gleichung eines Kegelschnittes durch die vier Punkte $S_1^\infty, S_2^\infty, U_1^\infty, U_2^\infty$

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 2c\,\bar{x}\,\bar{y} - \varkappa \cdot \bar{s}^2 = 0. \tag{10}$$

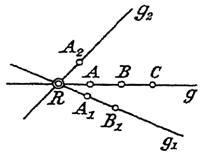


Fig. 67.

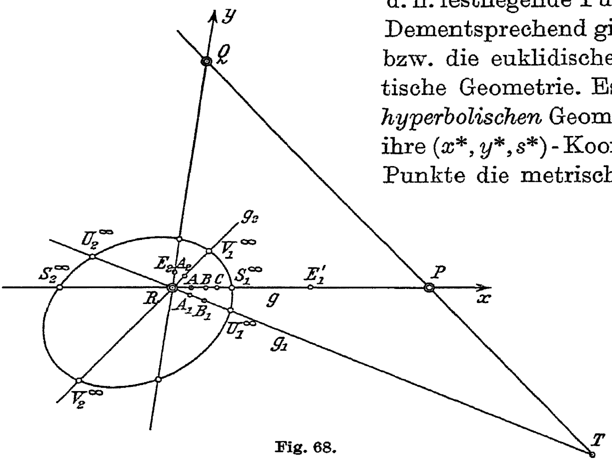


Fig. 68.

Man kann jetzt auch leicht erkennen, daß der Punkt A_2 in seiner Lage zu den übrigen Punkten nicht willkürlich gewählt sein darf, daß z. B. die drei Punkte A, A_1, A_2 nicht in einer Geraden liegen dürfen. Wenn nun V_1, V_2 die leicht mit ihren Koordinaten zu berechnenden Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit der Geraden g_2 sind, deren Gleichung die Form $\bar{y} = \alpha \cdot \bar{x}$ besitzt, so muß noch die Gleichung gelten

$$(V_1 V_2 R A_2) = (S_1^\infty S_2^\infty R A).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich dann eindeutig der Koeffizient c der Gleichung (10), so daß diese Gleichung des absoluten Kegelschnittes nunmehr völlig bestimmt ist. Es muß jedoch auch der Koordinatenanfangspunkt R nach unseren Annahmen im *Innern* des Kegelschnittes liegen. Es sei dann noch Q der Pol der Geraden g, der ja auf der Geraden PT, der Polaren von R, liegt und E_2 derjenige (auch mit seinen Koordinaten bestimmte) Punkt auf RQ, so daß die Strecke $RE_2 = RA$ ist. Wir können dann endlich das (x, y, s)-Koordinatensystem einführen, dessen Fundamentaldreieck das Polardreieck RPQ und dessen Einheitspunkt der Schnittpunkt von AQ und E_2P ist. In diesem Koordinatensystem lautet dann die Gleichung des absoluten Kegelschnittes wieder

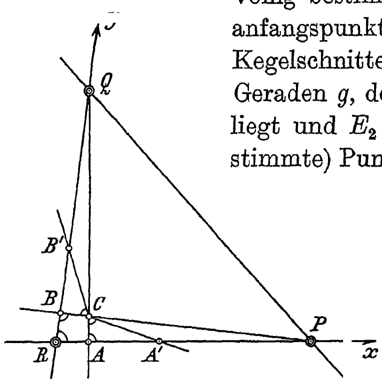


Fig. 69.

$$x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0.$$

Es sei ferner noch kurz auf folgendes andere einfache Beispiel der Festlegung des absoluten Kegelschnittes hingewiesen: Es sei zunächst ein rechter Winkel mit dem (im begrenzten Gebiet gelegenen) Scheitel R festgelegt (Fig. 69). Im Punkte A des einen und im Punkte B des anderen Schenkels sei ebenfalls je ein angetragener rechter Winkel festgelegt. Die freien Schenkel der beiden rechten Winkel mögen bzw. die Schenkel des rechten Winkels R in den Punkten Q und P schneiden. Ist dann C der Schnittpunkt von AQ und BP, so seien endlich noch die in C an AC und BC angetragenen rechten Winkel festgelegt. Wir brauchen im einzelnen nicht näher darauf einzugehen, wie aus diesen fünf rechten Winkeln dann die Weltkonstante $+\varkappa$ bzw. $-\varkappa$ und der absolute Kegelschnitt sich ergeben.

Dritter Abschnitt.

Die Bewegungsgruppen in den drei Geometrien.

§ 15. Die Darstellung der Bewegungen in der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie durch ihre Transformationsgleichungen.

Wir wollen nun noch näher betrachten, wie die Bewegungen bzw. in der euklidischen, hyperbolischen oder elliptischen Geometrie im einzelnen beschaffen sind. Unsere Betrachtungen werden die Einführung in die Bewegungslehre oder die *Kinematik* bilden. Doch sollen auch jetzt nur die Anfangs- und die Endlage der Ebene bei jeder Bewegung in Betracht kommen.

I. Wir wenden uns zunächst zur *euklidischen Geometrie:* In dieser sei ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben (vgl. den Satz 8 S. 31); die unendlich ferne Gerade hat also die Gleichung $s = 0$. Wir wissen natürlich:

1. Jede Bewegung läßt sich für die zusammenfallenden (x, y)*- und* $(\bar{x}, \bar{y})$*-Koordinatensysteme durch die Gleichungen darstellen*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax - by + c, \\ \bar{y} &= bx + ay + c', \end{aligned} \tag{1a, b}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + by + c, \\ \bar{y} &= bx - ay + c', \end{aligned} \tag{2a, b}$$

wo

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{3}$$

ist, oder homogen

$$\begin{aligned} \varrho\bar{x} &= ax - by + cs, \\ \varrho\bar{y} &= bx + ay + c's, \\ \varrho\bar{s} &= s, \end{aligned} \tag{1'a, b, c}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \varrho\bar{x} &= ax + by + cs, \\ \varrho\bar{y} &= bx - ay + c's, \\ \varrho\bar{s} &= s. \end{aligned} \tag{2'a, b, c}$$

Die Gleichungen (1a, b) *bzw.* (2a, b) *ergeben eine gleichsinnige bzw. ungleichsinnige Bewegung* (vgl. den Satz 6 S. 5).

In Übereinstimmung mit dem Satze 9 S. 6 wissen wir weiter:

2. Die dreigliedrige Gruppe aller Bewegungen wird durch die Gleichungen (1a, b) *und* (2a, b) *gegeben, wenn* a, b, c, c' *mit der Bedingung* $a^2 + b^2 = 1$ *beliebige reelle Zahlen sind.*

3. Die Bewegung (1a, b) *setzt sich zusammen aus einer „Drehung" (oder Rotation) um den Koordinatenanfangspunkt*

$$\begin{aligned} x' &= ax - by, \\ y' &= bx + ay \end{aligned} \tag{4a, b}$$

und aus einer „Parallelbewegung" (oder Translation)

$$\bar{x} = x' + c, \qquad \bar{y} = y' + c'. \tag{5 a, b}$$

Ist der Drehungswinkel der Rotation gleich α, so kann man die Gleichungen (4a, b) auch schreiben

$$x' = \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y, \qquad y' = \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y. \tag{4* a, b}$$

4. *Die Bewegung* (2a, b) *setzt sich zusammen aus der Umwendung um die x-Achse*

$$x' = x, \qquad y' = -y, \tag{6 a, b}$$

der Rotation um den Koordinatenanfangspunkt

$$x'' = a x' - b y', \qquad y'' = b x' + a y' \tag{7 a, b}$$

und der Translation

$$\bar{x} = x'' + c, \qquad \bar{y} = y'' + c'. \tag{8 a, b}$$

Die im Satze 2 festgelegte Gruppeneigenschaft wollen wir vom projektiven Standpunkt aus noch näher beleuchten. Man sieht zunächst leicht:

5. *Bei jeder der Bewegungen* (1'a, b) *geht jeder der beiden imaginären Kreispunkte* $(x, y, s) = (\pm i, 1, 0)$ *in sich über, während bei der Bewegung* (2'a, b) *sie sich vertauschen.* Umgekehrt ergibt sich leicht folgendes: In der euklidischen Ebene wird jede projektive Transformation, wie sie zunächst durch die Gleichungen (1) Bd. I S. 129 mit $\Delta \neq 0$ dargestellt wird, durch solche Gleichungen (1a, b) bzw. (2a, b) dargestellt, wenn die imaginären Kreispunkte sich einzeln selbst entsprechen bzw. sich miteinander vertauschen sollen und zugleich die Entfernung 1 des Punktes (1, 0, 1) vom Anfangspunkt (0, 0, 1) gleich der Entfernung der entsprechenden Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_0$ ist.

Denn die dritte der Gleichungen (1) Bd. I S. 129 muß ja zunächst die Form haben: $\varrho\bar{s} = s$, wobei $\gamma'' = 1$ gesetzt ist, und für die Koeffizienten der beiden ersten Gleichungen muß gelten, wenn z. B. die imaginären Kreispunkte sich einzeln selbst entsprechen sollen,

$$i = \frac{\alpha i + \beta}{\alpha' i + \beta'} \quad \text{und} \quad -i = \frac{-\alpha i + \beta}{-\alpha' i + \beta'},$$

wo wegen $\Delta \neq 0$ nicht $\alpha' = \beta' = 0$ sein kann, d.h. es muß $\alpha' = -\beta$, $\beta' = \alpha$ sein. Die Gleichungen (1) Bd. I S. 129 gehen also in die Form über

$$\begin{aligned} \varrho\bar{x} &= \alpha x + \beta y + \gamma s, \\ \varrho\bar{y} &= -\beta x + \alpha y + \gamma' s, \\ \varrho\bar{s} &= s. \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Punkte $\overline{P}_1, \overline{P}_0$ sind nun unhomogen $\alpha + \gamma, \; -\beta + \gamma'$ bzw. γ, γ' und ihre Entfernung ist gleich $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Es muß also noch $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ sein. Hiermit ist gezeigt, was behauptet wurde.

Wir können demnach zusammenfassend sagen:

6. Die Gruppe aller Bewegungen in der euklidischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche die imaginären Kreispunkte einzeln unverändert lassen bzw. miteinander vertauschen und außerdem die Länge einer Einheitsstrecke unverändert lassen.

7. Die Untergruppe aller gleichsinnigen Bewegungen in der euklidischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche sowohl die imaginären Kreispunkte einzeln wie auch die Länge einer Einheitsstrecke unverändert lassen.

Wir schließen sogleich noch folgende *Definitionen* an, von denen wir zwar weiterhin keinen Gebrauch machen (vgl. deswegen auch S. 2):

8. Die (den Bewegungen übergeordnete) *Gruppe aller „Ähnlichkeitstransformationen" in der euklidischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche die imaginären Kreispunkte einzeln unverändert lassen oder miteinander vertauschen.* Diese viergliedrige Gruppe wird durch die Gleichungen (1a, b) und (2a, b) gegeben, ohne daß die Bedingung (3) gilt.

9. Die Untergruppe aller gleichsinnigen Ähnlichkeitstransformationen in der euklidischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche die imaginären Kreispunkte einzeln unverändert lassen. Diese viergliedrige Untergruppe wird durch die Gleichungen (1a, b) festgelegt. Die Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen ist ersichtlich auch eine Untergruppe der Gruppe aller derjenigen projektiven Transformationen, welche die unendlich ferne Gerade unverändert lassen (wobei also die imaginären Kreispunkte dann nicht mehr unverändert bleiben.) *Die zugehörige Geometrie ist die äquiforme Geometrie.*

10. Diese letzte Gruppe nennen wir die affinen Transformationen oder affine Verwandtschaften oder die Gruppe der Affinitäten, die zu ihnen gehörende Geometrie die affine Geometrie.

Diese sechsgliedrige Gruppe wird durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \bar{y} &= \alpha' x + \beta' y + \gamma'. \end{aligned}\right\} \qquad (9\,\text{a, b})$$

11. Eine Untergruppe „perspektiver" Affinitäten wird von denjenigen affinen Transformationen gebildet, welche noch eine eigentliche Gerade punktweise unverändert lassen.

Wird diese eigentliche Gerade als x-Achse des kartesischen Koordinatensystems gewählt, so wird diese zweigliedrige Untergruppe durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= x + \beta y,\\ \bar{y} &= \beta' y.\end{aligned}\right\} \qquad (10\,\text{a, b})$$

Diese speziellen perspektiven Affinitäten sind auch der Grenzfall aller perspektiven Kollineationen oder Zentralkollineationen mit derselben Achse und demselben Zentrum, wenn eben dieses ins Unendliche rückt.

12. Eine weitere Untergruppe der Untergruppe des Satzes 11 entsteht, wenn auch noch ein bestimmter unendlich ferner Punkt $(x_0, y_0, 0)$, $y_0 \neq 0$ *unverändert ist.*

Diese eingliedrige Untergruppe hat dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} &= x + \frac{x_0}{y_0}(\beta' - 1)\, y,\\ \bar{y} &= \beta' y.\end{aligned}\right\} \qquad (11\,\text{a, b})$$

Auf alle diese besonderen Verhältnisse, insbesondere auf die zu den einzelnen Gruppen gehörenden Geometrien, näher einzugehen, haben wir indes hier keine Veranlassung (vgl. die Betrachtungen des § 1 S. 1 ff.).

II. Nun wenden wir uns zu den analogen Betrachtungen in der *hyperbolischen Geometrie* hin.

Offenbar geht hier bei jeder einzelnen Bewegung der einteilige absolute Kegelschnitt in sich über.

Es gilt aber auch umgekehrt: *Jede projektive Transformation, welche den absoluten Kegelschnitt in sich überführt, ist eine Bewegung der hyperbolischen Ebene.* Wir können dies leicht erkennen, wenn wir nun zu den Betrachtungen der §§ 26 und 27 im Bd. I zurückblicken, insbesondere zu den Sätzen 8 S. 176 und 1 S. 176 im Bd. I. Es sei dann die gegebene projektive Transformation, die den Kegelschnitt in sich überführt, dadurch festgelegt, daß die Kegelschnittspunkte A, B, C den Kegelschnittspunkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ zugeordnet sind (Fig. 70). Wir ziehen dann die Verbindungslinie AB, bestimmen deren absoluten Pol G und verbinden die Punkte G, C bis zum Schnitt F mit g. Dann ist die Gerade $GC = h$ die Senkrechte zu g in F. Die analogen Konstruktionen führen wir von den Punkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ aus. Dann können wir auch eine solche Bewegung betrachten, welche g mit F, der Richtung FA und der Seite FC in die Gerade $\bar{g}$ mit $\bar{F}$, der Richtung $\overrightarrow{\bar{F}\bar{A}}$ und der Seite $\overrightarrow{\bar{F}\bar{C}}$ überführt. Diese Bewegung ist ebenfalls eine projektive

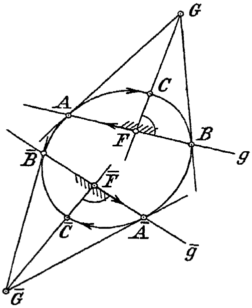


Fig. 70.

Transformation der Ebene, welche den Kegelschnitt in sich überführt und zwar die Punkte A, B, C in die Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Also ist diese projektive Transformation identisch mit der gegebenen.

Hiernach erhalten wir das Resultat:

13. Die Gruppe aller Bewegungen in der hyperbolischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche den (einteiligen) absoluten Kegelschnitt in sich überführen.

Wir können nun eine bestimmte Richtung der Durchlaufung des Kegelschnittes als die positive auszeichnen. Je nachdem dann, wenn C auf dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ liegt, auch $\bar{C}$ auf dem Bogen $\overset{\frown}{\bar{A}\bar{B}}$ oder auf dem Bogen $\overset{\frown}{\bar{B}\bar{A}}$ liegt, werden wir von einer *gleichsinnigen* oder *ungleichsinnigen Bewegung* sprechen. Ersichtlich können wir sogleich sagen: *Bei einer gleichsinnigen bzw. ungleichsinnigen Bewegung* (Fig. 71) *geht ein beliebiges Dreieck PQR mit gegebenem Umlaufungssinn P, Q, R in ein (kongruentes) Dreieck $\bar{P}\bar{Q}\bar{R}$ über, dessen entsprechender Umlaufungssinn der gleiche bzw. entgegengesetzte ist, und umgekehrt.* Der Umlaufungssinn des Dreiecks überträgt sich ja sogleich auch auf den absoluten Kegelschnitt. Wir brauchen ja nur entsprechende Punkte M, $\bar{M}$ im Innern der beiden Dreiecke hinzuzunehmen und diese mit den Punkten der einen oder anderen Dreiecksbegrenzung bis zum Schnitt mit dem absoluten Kegelschnitt zu verbinden. (Als *positiven* bzw. *negativen* Umlaufungssinn des absoluten Kegelschnittes, eines Dreiecks oder auch eines im Gebiet der eigentlichen Punkte gelegenen Kegelschnittes, eines eigentlichen Kegelschnittes, wollen wir einen solchen bezeichnen, der mit der Uhrzeigerdrehung einer auf der Ebene gelegenen Uhr übereinstimmt oder nicht.)

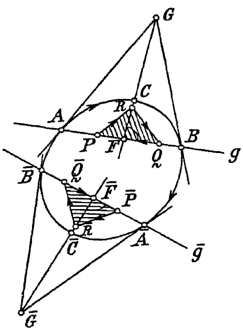


Fig. 71.

14. Die Untergruppe aller gleichsinnigen Bewegungen in der hyperbolischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche den absoluten Kegelschnitt und einen gegebenen Umlaufungssinn auf ihm in sich überführen.

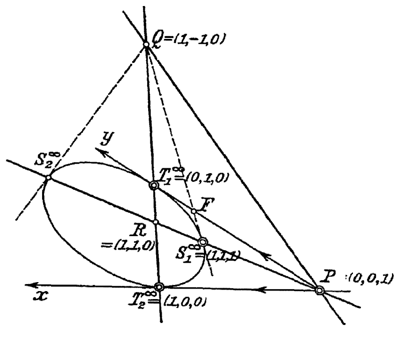


Fig. 72.

Um nun die Gruppe aller Bewegungen und die Untergruppe aller gleichsinnigen Bewegungen durch Gleichungen festzulegen, blicken wir zum Satze 4 im Bd. I S. 177 zurück. Um die Betrachtungen von dort zu übertragen, müssen

wir allerdings zunächst ein Tangentialdreieck des absoluten Kegelschnittes als Fundamentaldreieck und einen Kegelschnittspunkt als Einheitspunkt dem Koordinatensysteme in der hyperbolischen Ebene zugrunde legen (vgl. Satz 1 Bd. I S. 165). In der Fig. 72 sei $T_1^\infty T_2^\infty P$ das Tangentialdreieck und S_1^∞ der hinzugenommene Kegelschnittspunkt, wobei die Geraden $P T_2^\infty$ und $P T_1^\infty$ als neue x, y-Achsen gelten. In der Figur sind auch für eine Reihe von Punkten ihre neuen Koordinaten (x, y, s) hinzugefügt. Die Gleichung des absoluten Kegelschnittes lautet jetzt ja

$$x \cdot y - s^2 = 0\,. \tag{12}$$

15. Dann sind alle Bewegungen der hyperbolischen Ebene durch die Gleichungen (2a, b, c) *im Bd. I S. 176*

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \bar{x} &= a^2 x + b^2 y + 2abs, \\ \varrho' \bar{y} &= c^2 x + d^2 y + 2cds, \\ \varrho' \bar{s} &= acx + bdy + (ad + bc)s \end{aligned}\right\} \tag{13 a, b, c}$$

mit

$$\Delta = (ad - bc)^3 \neq 0 \tag{13 d}$$

gegeben. (Es sei bemerkt, daß man die Vorzeichen aller Koeffizienten auf den rechten Seiten dieser Gleichungen auch umkehren kann, was natürlich unwesentlich ist. Die Determinante Δ kehrt dann ihr Vorzeichen nicht um.)

16. Je nachdem $ad - bc > 0$ oder < 0 ist, ergeben die Gleichungen (13 a, b, c) *insbesondere eine gleichsinnige oder ungleichsinnige Bewegung der hyperbolischen Ebene.*

Denn die zugehörige Transformation der Punkte auf dem absoluten Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$\bar{\lambda} = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

ben. Es entsprechen also den Punkten $\bar{\lambda} = 0, 1, \infty$ die Punkte $\bar{\lambda} = \frac{b}{d}$, $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a}{c}$. Wir denken nun eine Durchlaufung des Kegelschnittes in solcher Richtung hinzu, daß die Punkte $0, 1, \infty$ in dieser Reihenfolge aufeinander folgen. Es sei zunächst der Einfachheit unserer Betrachtung zuliebe $c \neq 0$, $d \neq 0$, $c + d \neq 0$, $d > 0$. Statt der Koten $\frac{b}{d}$, $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a}{c}$ betrachten wir die um $\frac{b}{d}$ verminderten Koten 0, $\frac{ad-bc}{(c+d)\cdot d}$, $\frac{ad-bc}{cd}$. Man überzeugt sich nun leicht: Die Punkte dieser letzten drei Koten und damit auch die Punkte mit den Koten $\frac{b}{d}$, $\frac{a+b}{c+d}$, $\frac{a}{c}$ folgen bei der genannten Durchlaufung des Kegelschnittes in derselben oder entgegengesetzten Reihenfolge aufeinander wie die Punkte

0, 1, ∞, je nachdem $ad - bc > 0$ oder < 0 ist. Ist z. B. $ad - bc > 0$ und $c > 0$, also $cd > 0$, so ist ja $\frac{ad - bc}{cd} > 0$ und

$$0 < \frac{ad - bc}{(c+d)d} < \frac{ad - bc}{cd}$$

Ist aber $ad - bc > 0$ und $c < 0$, also $cd < 0$, so ist $\frac{ad - bc}{cd} < 0$, aber

$$\frac{ad - bc}{(c+d)d} < \frac{ad - bc}{cd} < 0, \quad \text{wenn } (c+d)d < 0,$$

dagegen

$$\frac{ad - bc}{cd} < 0 < \frac{ad - bc}{(c+d)d}, \quad \text{wenn } (c+d)d > 0 \text{ ist.}$$

Nicht viel anders ist der Beweis, wenn $c = 0$ ($d \neq 0$) oder $d = 0$ ($c \neq 0$) oder $c + d = 0$ ($c \neq 0$, $d \neq 0$) ist.

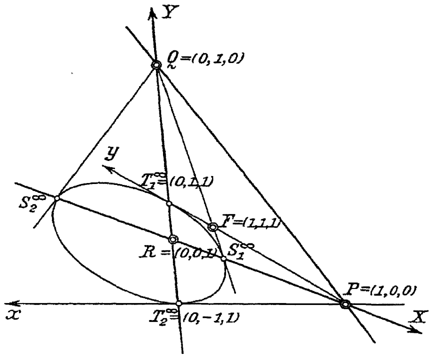


Fig. 73.

Wir wollen nun aber wieder zu unserem früheren Koordinatensystem der Fig. 65 auf S. 52 zurückkehren und zusehen, wie in diesem die Gruppe der Bewegungen sich darstellt. Es sei also zunächst das (x, y, s)-Koordinatensystem der Fig. 72 S. 63 gegeben, in ihm gelten also die Gleichungen (13a, b, c). Hierzu sei nun zunächst folgendes neue (X, Y, S)-Koordinatensystem hinzugefügt (Fig. 73): Das Polardreieck PQR sei das neue Fundamentaldreieck, der Schnittpunkt F von PT_1^∞, QS_1^∞ sei der Einheitspunkt und die Geraden RP, RQ seien als (X, Y)-Achsen gewählt. Die neuen Koordinaten X, Y, S sind in der Fig. 73 für einige Punkte eingetragen. Für die vier Punkte P, T_1^∞, T_2^∞, S_1^∞, von denen keine drei in einer Geraden liegen, ergeben sich dann folgende alte und neue Koordinaten:

	P	T_1^∞	T_2^∞	S_1^∞
x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
s	1	0	0	1

und

	P	T_1^∞	T_2^∞	S_1^∞
X	1	0	0	1
Y	0	1	−1	0
S	0	1	1	1

Die Transformationsformeln 13 im Bd. I S. 125 wollen wir hier schreiben

$$\begin{aligned} \varrho x &= \alpha X + \beta Y + \gamma S, \\ \varrho y &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' S, \\ \varrho s &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' S. \end{aligned}$$

Sie nehmen den entsprechenden Punktquadrupeln gemäß die einfachere Form an

$$\left.\begin{aligned}\varrho x &= -Y + S,\\ \varrho y &= Y + S,\\ \varrho s &= X.\end{aligned}\right\} \qquad (14\,\mathrm{a, b, c})$$

Entsprechend geht die Gleichung (12) des absoluten Kegelschnittes über in die Gleichung

$$X^2 + Y^2 - S^2 = 0 \qquad (15)$$

(vgl. die Gleichung 7 S. 54).

Die Bewegungsgleichungen (13a, b) aber gehen in die Gleichungen über

$$\begin{aligned}\varrho'(\bar S - \bar Y) &= a^2(S - Y) + b^2(S + Y) + 2abX,\\ \varrho'(\bar S + \bar Y) &= c^2(S - Y) + d^2(S + Y) + 2cdX,\\ \varrho' \cdot \bar X &= ac(S - Y) + bd(S + Y) + (ad + bc)X\end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\varrho''\bar X &= 2(ad - bc)\,X + 2(bd - ac)\,Y + 2(bd + ac)\,S,\\ \varrho''\bar Y &= 2(cd - ab)\,X + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\,Y + (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)\,S,\\ \varrho''\bar S &= 2(cd + ab)\,X + (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)\,Y + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,S.\end{aligned}\right\} \qquad (16\,\mathrm{a, b, c})$$

Denken wir aber nunmehr dasselbe Koordinatensystem eingeführt, wie in der Figur 65 S. 52 (vgl. die Transformationsgleichungen (8a, b, c) S. 54) und für dieses die Bezeichnungen der Koordinaten wieder mit (x, y, s) gewählt, so gehen diese letzten Transformationsformeln endlich über in die Formeln

$$\left.\begin{aligned}\varrho\,\bar x &= 2(ad - bc)\,x + 2(bd - ac)\,y + 2\sqrt{\varkappa}(bd + ac)\,s,\\ \varrho\,\bar y &= 2(cd - ab)\,x + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)\,y + \sqrt{\varkappa}(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)\,s,\\ \varrho\,\bar s &= 2\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(cd + ab)\,x + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)\,y + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\,s.\end{aligned}\right\} \qquad (17\,\mathrm{a, b, c})$$

Abschließend können wir daher das Resultat aussprechen:

17. Die Gruppe aller Bewegungen der hyperbolischen Ebene wird in dem Koordinatensystem, welches der Gleichung $x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$ *des absoluten Kegelschnittes zugrunde liegt, durch die Gleichungen* (17a, b, c) *gegeben, wo die Größen* a, b, c, d *irgendwelche reellen Zahlenwerte mit der Bedingung* $ad - bc \neq 0$ *bedeuten.*

§ 16. Die Darstellung der Bewegungen in der elliptischen Geometrie durch ihre Transformationsgleichungen.

Endlich wenden wir uns zur *elliptischen Geometrie* hin.

Auch hier gelten die beiden Sätze:

1. Bei jeder einzelnen Bewegung der elliptischen Ebene geht der nullteilige Kegelschnitt (d. h. das zugehörige absolute Polarsystem) in sich über, und umgekehrt:

2. Jede projektive Transformation, die den absoluten Kegelschnitt in sich überführt, ist eine Bewegung.

Denn was zunächst den *Satz 1* betrifft, so ist eine einzelne Bewegung ja dadurch festgelegt, daß eine Gerade g mit einem Punkt F und bestimmter Richtung und Seite in eine andere Gerade $\bar g$ mit einem Punkt $\bar F$ und bestimmter Richtung und Seite übergeht. Die Richtung und Seite von g ist in der Fig. 74 ja durch von F ausgehende Pfeilrichtungen auf g und der Senkrechten h zu g festgelegt. Hierdurch ist auch ein bestimmtes absolutes Polardreieck mit den

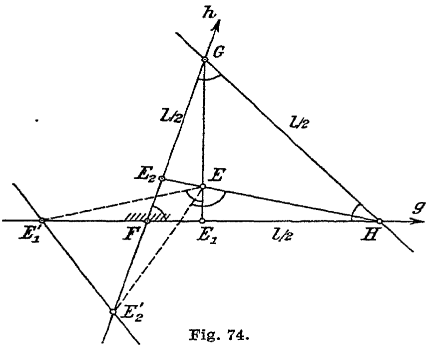


Fig. 74.

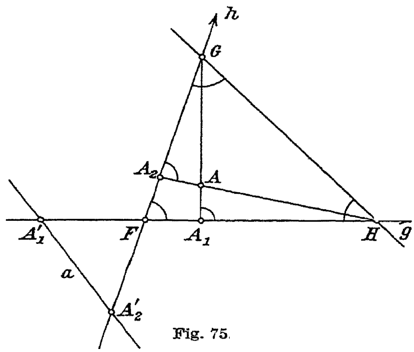


Fig. 75.

Seiten $\overrightarrow{FH}$ und $\overrightarrow{FG}$ festgelegt. Dieses muß dann ersichtlich durch die Bewegung in das entsprechende absolute Polardreieck $\bar F \bar G \bar H$, das zu der Geraden $\bar g$ gehört, übergehen. Ferner müssen auch die Einheitsstrecke $\overrightarrow{FE_1}$ auf $\overrightarrow{FH}$ und die Einheitsstrecke $\overrightarrow{FE_2}$ auf $\overrightarrow{FG}$ in die entsprechenden Einheitsstrecken der anderen Figur übergehen, und damit auch der Punkt E, der Schnittpunkt von GE_1 und HE_2 in den entsprechenden Punkt $\bar E$ der anderen Figur. Nun ist auch leicht zu sehen, daß auch die absolute Polare von E in die absolute Polare von $\bar E$ übergehen muß wegen der entsprechenden rechten Winkel an den Punkten E und $\bar E$. $\left(\text{Es ist ja auch } \overrightarrow{E_1'E_1} = \overrightarrow{E_2'E_2} = \frac{l}{2} \text{ und ebenso } \overrightarrow{\bar E_1'\bar E_1} = \overrightarrow{\bar E_2'\bar E_2} = \frac{l}{2}.\right)$ Ganz ebenso ist aber auch leicht zu erkennen, daß *jeder* beliebige Punkt A und seine absolute Polare a stets wieder in einen Punkt $\bar A$ und seine absolute Polare $\bar a$ übergehen muß. Denn es sei z. B. A nicht auf GH gelegen, so geht auch a nicht durch F (Fig. 75). Es seien dann A_1, A_2 die Schnittpunkte von GA und HA mit g, h und A_1', A_2' die Schnittpunkte von a mit g, h. Ferner seien $\bar A, \bar a, \bar A_1, \bar A_2, \bar A_1', \bar A_2'$ die durch die Bewegung sich ergebenden entsprechenden Punkte und Geraden. Da dann $\overrightarrow{A_1'A_1} = \overrightarrow{A_2'A_2} = \frac{l}{2}$ ist, so ist auch

$\overrightarrow{\bar{A}_1'\bar{A}_1} = \overrightarrow{\bar{A}_2'\bar{A}_2} = \frac{l}{2}$ und folglich ist auch $\bar{a}$ die absolute Polare zu $\bar{A}$. Dieser Beweis beruht also einfach auf der Tatsache: Für einen beliebigen Punkt A und seine absolute Polare a gilt die Eigenschaft: Alle Geraden durch A werden von diesem Punkte und seiner Polaren halbiert, und diese Eigenschaft wird durch eine beliebige Bewegung ersichtlich nicht zerstört.

Auch der *Satz 2*, die Umkehrung, ist leicht zu beweisen. Denn dann geht ja durch die projektive Transformation ein beliebiges absolutes Polardreieck FGH wieder in ein absolutes Polardreieck $\bar{F}\bar{G}\bar{H}$ über (Fig. 75). Es ist nun aber auch dadurch eine bestimmte Bewegung festgelegt, daß die Gerade $g = FH$ mit F, einer bestimmten Richtung $\overrightarrow{FH}$ und einer bestimmten Seite $\overrightarrow{FG}$ in die entsprechende Gerade $\bar{g} = \bar{F}\bar{H}$ mit $\bar{F}$, einer bestimmten Richtung $\overrightarrow{\bar{F}\bar{H}}$ und einer bestimmten Seite $\overrightarrow{\bar{F}\bar{G}}$ übergeht. Wir haben zu zeigen, daß diese Bewegung, die ja auch eine projektive Transformation ist, mit der gegebenen projektiven Transformation identisch ist. Dies erkennen wir wie folgt: Die Bewegung führt auch die Punkte G, H in die Punkte $\bar{G}, \bar{H}$ über. Sowohl durch die projektive Transformation wie durch die Bewegung gehen aber weiter auch die Schnittpunktpaare jeder der Geraden FG, FH und GH mit dem absoluten Kegelschnitt entsprechend in die Schnittpunktpaare bzw. der Geraden $\bar{F}\bar{G}$, $\bar{F}\bar{H}$ und $\bar{G}\bar{H}$ mit dem absoluten Kegelschnitt über. Folglich ist die projektive Transformation mit der Bewegung identisch.

Wir haben alle diese Betrachtungen etwas ausführlich durchgeführt, weil die Sätze 1 und 2 doch von besonderer Wichtigkeit für unseren ganzen Aufbau der elliptischen Geometrie sind.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt nun sogleich:

3. Die Gruppe aller Bewegungen in der elliptischen Ebene wird durch die Gesamtheit aller projektiven Transformationen gegeben, welche den (nullteiligen) absoluten Kegelschnitt in sich überführen (vgl. den Satz 13 S. 63).

Wir können uns sogleich wieder fragen, *ob wir auch in der elliptischen Geometrie ebenso wie in den beiden anderen Geometrien gleichsinnige und ungleichsinnige Bewegungen unterscheiden können.* Im Hinblick auf den Satz 4 S. 34 ist diese Frage zu verneinen. Wenn wir uns auf das begrenzte Gebiet eines Dreiecks beschränkten, so könnten wir sehr wohl gleichsinnige und ungleichsinnige Bewegungen insofern unterscheiden, als durch diese ein Dreieck ABC mit gegebenem positiven Umlaufssinn (der also mit dem Umlaufssinn des Uhrzeigers einer auf der Dreiecksfläche liegenden Uhr übereinstimmt) in ein Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mit gleichem oder entgegengesetztem Umlaufssinn übergeführt wird (Fig. 76; vgl. den Satz 6 S. 5 und den Satz 15 S. 21). Ganz anders

aber liegen die Verhältnisse, wenn wir die ganze elliptische Ebene betrachten, da diese eben eine einseitige Fläche ist (vgl. den Satz 2 im Bd. I S. 198).

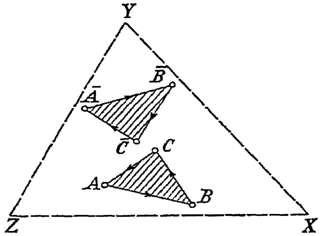


Fig. 76.

Nun aber möchten wir doch auch wieder die Gruppe aller Bewegungen durch ihre Gleichungen festlegen. Zunächst sei folgender Satz aufgestellt:

4. Die durch die folgenden Gleichungen gegebenen projektiven Transformationen

$$\begin{aligned}\varrho' \bar{x} &= (p^2 - q^2 - m^2 + n^2)\,x + 2\,(pm - qn)\,y - 2\sqrt{\varkappa}\,(pq + mn)\,s,\\ \varrho' \bar{y} &= -2\,(pm + qn)\,x + (p^2 + q^2 - m^2 - n^2)\,y - 2\sqrt{\varkappa}\,(pn - qm)\,s,\\ \varrho' \bar{s} &= 2\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,(pq - mn)\,x + 2\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,(pn + qm)\,y + (p^2 - q^2 + m^2 - n^2)\,s,\end{aligned} \qquad (1\,\text{a, b, c})$$

wo p, q, m, n beliebige reelle Zahlen sind mit der Bedingung $p^2 + q^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ (d. h. nicht alle Zahlen p, q, m, n sollen verschwinden), *führen den absoluten Kegelschnitt der Gleichung* (7) *S. 42 in sich über, stellen also auch Bewegungen dar.*

Der direkte Beweis dieses Satzes läßt sich ja dadurch erbringen, daß wir zeigen: Die Gleichung

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \varkappa \bar{s}^2 = 0$$

geht durch jede solche Transformation in die Gleichung

$$x^2 + y^2 + \varkappa s^2 = 0 \quad \text{über.}$$

Wir hätten aber noch zu zeigen: Es gibt keine andere projektive Transformation, die den absoluten Kegelschnitt in sich überführt, als die durch die Gleichungen (1 a, b, c) aufgestellten. Wenn auch dies gezeigt wird, gilt dann auch der Satz:

5. Die Gruppe aller Bewegungen der elliptischen Ebene wird durch die Gleichungen (1 a, b, c), *in der nicht sämtliche reelle Größen p, q, m, n verschwinden dürfen, gegeben* (vgl. den Satz 17 S. 66).

Doch um dieses Resultat zu gewinnen, überhaupt um eine tiefere Einsicht in diese Verhältnisse zu bekommen, müssen wir schon weiter ausholen. Dies wird dann auch für unsere späteren Betrachtungen von großem Nutzen sein.

§ 17. Die Ableitung der Transformationsgleichungen für die Gruppe der Bewegungen in der elliptischen Geometrie.

Wir müssen uns doch den absoluten Kegelschnitt der elliptischen Geometrie zunächst noch genauer ansehen. (Die folgenden Betrachtungen lassen sich natürlich sinngemäß auch auf die hyperbolische Geometrie übertragen.)

Jede reelle Gerade schneidet ja den Kegelschnitt in zwei konjugiert-imaginären Punkten, den Doppelpunkten der elliptischen Involution, die durch das

absolute Polarsystem auf der Geraden bestimmt wird. Da es nun ∞^2 Geraden in der Ebene gibt, haben wir auch auf ∞^2 Paare solcher konjugiert-imaginärer Punkte des Kegelschnittes unser Augenmerk zu richten. Wir wollen nun die Betrachtungen, die wir im Bd. I § 26 für einteilige Kegelschnitte durchgeführt haben, auch auf unseren nullteiligen Kegelschnitt übertragen. Wir gehen aus von einem beliebigen absoluten Polardreieck, das wir als Fundamentaldreieck mit dem Einheitspunkt E dem Koordinatensystem zugrunde legen, wie in der Fig. 52 S. 38. Die Gleichung des absoluten Kegelschnittes ist also, wie früher,

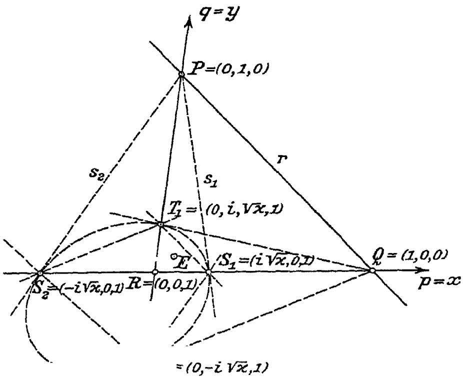


Fig. 77.

$$x^2 + y^2 + \varkappa s^2 = 0. \qquad (1)$$

Die x-Achse bzw. y-Achse schneidet den Kegelschnitt in den konjugiert-imaginären Punkten S_1, S_2 bzw. T_1, T_2. In der schematischen, aber gleichwohl für unsere Übersicht nützlichen Fig. 77 sind der absolute Kegelschnitt wie auch die nicht reellen Geraden gestrichelt angedeutet. Zu allen Punkten der Figur sind ihre Koordinaten hinzugefügt. (Es ist ja $(Q R S_1 S_2) = (P R T_1 T_2) = -1$.) Die Geraden $S_1 P$ und $S_2 P$ sind die Tangenten von S_1, S_2 an den Kegelschnitt mit dem reellen Schnittpunkt P. Im folgenden sind auch die Gleichungen der angegebenen Geraden aufgestellt:

Gerade	Ihre Gleichung	Gerade	Ihre Gleichung
$p = S_1 S_2$	$y = 0$	$S_1 T_1$	$x + y - \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$
$q = T_1 T_2$	$x = 0$	$S_2 T_1$	$x - y + \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$
$s_1 = S_1 P$	$-x + \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$	$S_1 T_2$	$-x + y + \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$
$s_2 = S_2 P$	$x + \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$	$S_2 T_2$	$x + y + \sqrt{\varkappa}\, i s = 0$

Wir bezeichnen nun auch die linken Seiten der Gleichungen für die Geraden p, s_1, s_2 mit denselben Buchstaben p, s_1, s_2. Dann betrachten wir die beiden Strahlenbüschel mit den Trägern S_1 und S_2.

Eine beliebige Gerade durch S_1 bzw. S_2 sei durch die Gleichungen festgelegt

$$\left.\begin{aligned} p - \lambda s_1 &= 0, \\ s_2 - \lambda p &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{a, b})$$

wo λ ein beliebiger *komplexer* Parameter sei (vgl. die Gleichungen (1a, b) im Bd. I S. 174):

Denn es ist für $\lambda = +1$

$$p - \lambda s_1 = y - (-x + \sqrt{\varkappa}\, i s) = 0,$$
$$s_2 - \lambda p = (x + \sqrt{\varkappa}\, i s) - y = 0$$

und für $\lambda = -1$

$$p - \lambda s_1 = y + (-x + \sqrt{\varkappa}\, i s) = 0,$$
$$s_2 - \lambda p = (x + \sqrt{\varkappa}\, i s) + y = 0.$$

Für $\lambda = +1$ stellen diese Gleichungen die Geraden $S_1 T_1$ und $S_2 T_1$, beide zusammen also den Punkt T_1 als den Schnittpunkt der Geraden dar, und für $\lambda = -1$ die Geraden $S_1 T_2$ und $S_2 T_2$ mit ihrem Schnittpunkt T_2.

Eliminieren wir aus den Gleichungen (2a, b) den Parameter λ, so ergibt sich

$$p^2 - s_1 s_2 = 0 \tag{3}$$

oder

$$y^2 - (-x + \sqrt{\varkappa}\, i s) \cdot (x + \sqrt{\varkappa}\, i s) = 0, \tag{3'}$$

d. h. die Gleichung (1) des absoluten Kegelschnittes.

1. Der geometrische Ort der ∞^2 Schnittpunkte für alle Geradenpaare, die sich für einen beliebigen komplexen Wert λ ergeben, ist also der absolute Kegelschnitt.

Der für den einzelnen Wert λ sich ergebende Schnittpunkt besitzt nach den Gleichungen (2a, b) die Koordinaten

$$x : y : s = i(\lambda^2 \quad 1) : 2\lambda i : \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(\lambda^2 + 1), \tag{4}$$

die eben der Gleichung (1) genügen.

Setzen wir jetzt

$$\lambda = r e^{i\varphi}, \tag{5a}$$

so lauten die letzten Gleichungen

$$x : y : s = i \qquad\qquad 1) : 2 r e^{i\varphi} i : \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(r^2 e^{2i\varphi} + 1). \tag{4'}$$

Für den Wert

$$\lambda = -\frac{1}{r}\, e \tag{5b}$$

ergeben sich ferner die Koordinaten

$$\begin{aligned} x : y : s &= i\left(\frac{1}{r^2} e^{2i\varphi} - 1\right) : \left(-\frac{2}{r} e^{i\varphi}\right) i : \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\left(\frac{1}{r^2} e^{2i\varphi} + 1\right) \\ &= i(1 - r^2 e^{-2i\varphi}) : (-2 r e^{-i\varphi}) i : \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(r^2 e^{-2i\varphi} + 1), \end{aligned} \tag{4''}$$

d. h. die Koordinaten (4′) und (4″) sind zueinander konjugiert-komplex.

2. Wir erhalten also für die Werte (5a, b) *stets zwei konjugiert-komplexe Punkte des absoluten Kegelschnittes.*

3. Die reelle Verbindungsgerade der beiden konjugiert-komplexen Punkte aber lautet

$$\begin{vmatrix} x & y & \\ i(r^2 e^{2i\varphi} - 1) & 2r e^{i\varphi} i & \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(r^2 e^{2i\varphi} + 1) \\ i(1 - r^2 e^{-2i\varphi}) & -2r e & \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}(r^2 e^{-i\varphi} + 1) \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$2xr\cos\varphi + y(1 - r^2) + 2s\sqrt{\varkappa}\, r\sin\varphi = 0. \tag{6}$$

4. Jedem der ∞^2 reellen und imaginären Kegelschnittspunkte ist also durch die Gleichungen (2a, b) *eine bestimmte Kote λ zugeordnet.*

Wir betrachten nun eine Transformation

$$\bar{\lambda} = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad \text{mit} \quad \Delta_\lambda = ad - bc \neq 0 \tag{7}$$

oder, homogen geschrieben

$$\begin{aligned} \sigma\bar{\lambda} &= a\lambda + b\lambda', \\ \sigma\bar{\lambda}' &= c\lambda + d\lambda'. \end{aligned} \tag{7 a, b}$$

Dann können wir ganz dieselben Bemerkungen hieran anknüpfen, wie wir sie im Bd. I S. 174ff. für einen einteiligen Kegelschnitt durchgeführt haben. Durch die Transformation (7) gehen je vier Kegelschnittspunkte so ineinander über, daß das Doppelverhältnis der vier Koten invariant bleibt und umgekehrt:

5. Soll jedem Punkte des Kegelschnittes mit der Kote λ ein anderer Punkt mit der Kote $\bar{\lambda}$ zugeordnet sein und umgekehrt, und sollen hierbei stets vier Punkte mit dem Doppelverhältnis -1 *ihrer Koten wieder in solche vier Punkte übergehen, so wird diese Verwandtschaft der Kegelschnittspunkte durch die Gleichungen* (7a, b) *gegeben. Diese Verwandtschaft ist aber bereits eindeutig bestimmt, wenn drei beliebigen Punkten A, B, C des Kegelschnittes die drei neuen Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ des Kegelschnittes zugeordnet sind.*

Nun aber können wir die Verbindung mit den Bewegungen der elliptischen Geometrie herstellen (vgl. den § 27).

Aus den Gleichungen (2a, b) folgt ja

$$s_2 : s_1 : p = \lambda^2 : 1 : \lambda \tag{8}$$

oder, wenn wir statt λ homogen $\frac{\lambda}{\lambda'}$ setzen,

$$s_2 : s_1 : p = \lambda^2 : \lambda'^2 : \lambda\lambda'. \tag{8'}$$

Wir können aber s_2, s_1, p als neue Koordinaten X, Y, S der Ebene ansehen. Denn es ist ja

$$\begin{aligned} \tau X &= s_2 = x + \sqrt{\varkappa}\, i s, \\ \tau Y &= s_1 = -x + \sqrt{\varkappa}\, i s, \\ \tau S &= p = y \end{aligned} \tag{9 a, b, c}$$

eine lineare Transformation des (x, y, s)-Koordinatensystems mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\varkappa}i \\ -1 & 0 & \sqrt{\varkappa}i \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2i\sqrt{\varkappa} \neq 0.$$

Allerdings hat jetzt die lineare Transformation nicht mehr reelle Koeffizienten wie bisher. Es gilt nunmehr für die Punkte des absoluten Kegelschnittes

$$\left.\begin{aligned} \varrho X &= \lambda^2, \\ \varrho Y &= \lambda'^2, \\ \varrho S &= \lambda\lambda', \end{aligned}\right\} \qquad (10\,\text{a, b, c})$$

und die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in den neuen Koordinaten lautet

$$XY - S^2 = 0. \qquad (11)$$

Mit der Transformation (7a, b) der Kegelschnittspunkte ist dann aber eine projektive Transformation der ganzen Ebene verbunden, welche den absoluten Kegelschnitt in sich überführt. Diese Transformation der Ebene wird eben durch die Formeln gegeben (vgl. die Formeln (2a, b, c) Bd. I S. 176)

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}\sigma^2\overline{X} &= \sigma^2\bar{\lambda}^2 &&= \varrho\,[a^2X + b^2Y + 2ab\,S], \\ \bar{\varrho}\sigma^2\overline{Y} &= \sigma^2\bar{\lambda}'^2 &&= \varrho\,[c^2X + d^2Y + 2cd\,S], \\ \bar{\varrho}\sigma^2\overline{S} &= \sigma^2\bar{\lambda}\bar{\lambda}' &&= \varrho\,[ac\,X + bd\,Y + (ad + bc)\,S] \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varrho'\overline{X} &= a^2X + b^2Y + 2abS, \\ \varrho'\overline{Y} &= c^2X + d^2Y + 2cdS, \\ \varrho'\overline{S} &= acX + bdY + (ad + bc)S. \end{aligned}\right\} \qquad (12\,\text{a, b, c})$$

Doch sollen die Größen a, b, c, d zunächst beliebige reelle oder komplexe Zahlen sein können, so daß der bisherige Begriff einer projektiven Transformation eine Erweiterung erfahren hat.

Es gilt aber auch umgekehrt:

6. *Jede solche Transformation* (12a, b, c) *der Ebene für gegebene Zahlen* a, b, c, d, *die reell oder komplex sein können, mit der Determinante* $\Delta = (ad - bc)^3 = \Delta_\lambda^3 \neq 0$ *stellt eine solche projektive Verwandtschaft der Ebene dar, bei der der absolute Kegelschnitt* (11) *als Ganzes in sich übergeht, seine Punkte aber die Transformation* (7a, b) *erleiden.*

Nun aber interessieren uns hier natürlich nur solche Transformationen (7a, b) und solche sich anschließende projektive Transformationen (12a, b, c) der Ebene, für welche konjugiert-komplexe Punkte des Kegelschnittes wieder in solche übergehen. Dann entspricht ja auch jeder reellen Geraden eine

reelle Gerade und jedem reellen Punkt ein reeller Punkt, d. h. gerade dann stellt die Transformation (12a, b, c) eine Bewegung der elliptischen Ebene dar. Um diese projektiven Transformationen auszusondern, wollen wir in den Gleichungen (12a, b, c) zunächst die Koordinaten X, Y, S durch die Koordinaten x, y, s nach den Formeln (9a, b, c) ersetzen. Es ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \varrho'(\bar{x}+\sqrt{\varkappa}i\bar{s}) &= a^2(x+\sqrt{\varkappa}is)+b^2(-x+\sqrt{\varkappa}is)+2aby,\\ \varrho'(-\bar{x}+\sqrt{\varkappa}i\bar{s}) &= c^2(x+\sqrt{\varkappa}is)+d^2(-x+\sqrt{\varkappa}is)+2cdy,\\ \varrho'\bar{y} &= ac(x+\sqrt{\varkappa}is)+bd(-x+\sqrt{\varkappa}is)+(ad+bc)y \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \varrho'\bar{x} &= \frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2}x+(ab-cd)y+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\sqrt{\varkappa}is,\\ \varrho'\bar{y} &= (ac-bd)x+(ad-bc)y+(ac+bd)\sqrt{\varkappa}is, \qquad (13\text{a,b,c})\\ \varrho'\bar{s}\sqrt{\varkappa} &= \frac{-a^2+b^2-c^2+d^2}{2}ix-(ab+cd)iy+\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}\sqrt{\varkappa}s. \end{aligned}$$

Nun sollen reellen Koordinaten x, y, s wieder reelle Koordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}$ entsprechen. Es müssen also (für reelles ϱ') die Koeffizientenzahlen

$$a^2-b^2-c^2+d^2, \quad ab-cd, \quad ac-bd, \quad ad+bc \quad \text{und} \quad a^2+b^2+c^2+d^2$$

und damit auch die Zahlen a^2+d^2 und b^2+c^2 *reell* und die Koeffizientenzahlen

$$a^2+b^2-c^2-d^2, \quad ac+bd, \quad -a^2+b^2-c^2+d^2 \quad \text{und} \quad ab+cd$$

und damit auch die Zahlen a^2-d^2 und b^2-c^2 *rein imaginär* sein.

Es sei demgemäß gesetzt

$$\begin{aligned} a^2+d^2 &= 2\alpha, \\ a^2-d^2 &= 2i\delta \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} b^2+c^2 &= 2\beta, \\ b^2-c^2 &= 2i\gamma, \end{aligned}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier *reelle* Zahlen bedeuten.

Es ist dann
$$\begin{aligned} a^2 &= \alpha+i\delta, \\ d^2 &= \alpha-i\delta \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} b^2 &= \beta+i\gamma, \\ c^2 &= \beta-i\gamma. \end{aligned}$$

Wir setzen weiter
$$\begin{aligned} a &= p+iq, \\ d &= p_1+iq_1, \end{aligned}$$

wo p, q, p_1, q_1 reelle Zahlen sind, so daß

$$\begin{aligned} a^2 &= (p^2-q^2)+2pqi, \\ d^2 &= (p_1^2-q_1^2)+2p_1q_1i \end{aligned}$$

ist. Dann muß sein
$$\begin{aligned} p_1^2-q_1^2 &= p^2-q^2=\alpha, \\ -2p_1q_1 &= +2pq=\delta. \end{aligned}$$

Denken wir dann $a = p + iq$ gegeben, so folgen zunächst aus den beiden quadratischen Gleichungen

$$p_1^2 - q_1^2 = p^2 - q^2$$
$$- p_1 q_1 = p\, q$$

die beiden Möglichkeiten

$$\begin{matrix} p_1 = p, \\ q_1 = -q \end{matrix} \quad (14\,\mathrm{a}) \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{matrix} p_1 = -p, \\ q_1 = q, \end{matrix}\right\} \qquad (14\,\mathrm{b})$$

da die beiden anderen Lösungen

$$\begin{matrix} p_1 = iq, \\ q_1 = ip \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} p_1 = -iq, \\ q_1 = -ip \end{matrix}$$

ausscheiden.

Ebenso setzen wir

$$b = m + in,$$
$$c = m_1 + in_1,$$

so daß

$$m_1^2 - n_1^2 = m^2 - n^2 = \beta,$$
$$-2m_1 n_1 = +2mn = \gamma$$

ist. Es ist dann auch

$$\left.\begin{matrix} m_1 = m, \\ n_1 = -n \end{matrix}\right\} \quad (15\,\mathrm{a}) \qquad \text{oder} \qquad \left.\begin{matrix} m_1 = -m, \\ n_1 = n. \end{matrix}\right\} \qquad (15\,\mathrm{b})$$

Nun ergibt sich weiter für die *Möglichkeiten* (14a) *und* (15a)

$$\begin{matrix} a = p + iq, \\ d = p - iq \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} b = m + in, \\ c = m - in \end{matrix}$$

und also

$$ab - cd = 2i(pn + qm),$$
$$ac - bd = 2i(qm - pn),$$
$$ac + bd = 2(pm + qn),$$
$$ab + cd = 2(pm - qn).$$

Ist einer der vier Ausdrücke auf den rechten Seiten dieser Gleichungen $\neq 0$, so muß dieser Fall ausscheiden. Denn ist z. B. $pn + qm \neq 0$, so ist ja $ab - cd$ hier rein imaginär, während es doch reell sein muß. Die vier Ausdrücke auf den rechten Seiten können aber nur dann *sämtlich* gleich 0 sein, wenn entweder $p = q = 0$, d. h. $a = d = 0$ oder $m = n = 0$, d. h. $b = c = 0$ ist. Ist $a = d = 0$ bzw. $b = c = 0$, so ist die Zusammenstellung der Möglichkeiten (14a) und (15a) identisch mit der Zusammenstellung der Möglichkeiten (14b) und (15a) bzw. (14a) und (15b). Diese besonderen Fälle können wir also auch hier ausscheiden. Es scheidet also die Zusammenstellung der Möglichkeiten (14a) und (15a) überhaupt aus.

Ebenso ist zu zeigen, daß auch die Zusammenstellung der *Möglichkeiten* (14b) *und* (15b) ausscheidet. (Es haben ja gegen die vorige Zusammenstellung jetzt c und d nur das Vorzeichen gewechselt.)

Für die *Möglichkeiten* (14a) *und* (15b) ist

$$\begin{aligned} a &= p + iq, \\ d &= p - iq \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} b &= m + in, \\ c &= -m + in. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Koeffizientenzahlen

$$\begin{aligned} ab - cd &= 2(pm - qn), \\ ac - bd &= -2(pm + qn), \\ ad + bc &= p^2 + q^2 - m^2 - n^2, \\ ac + bd &= 2(pn - qm)\,i, \\ ab + cd &= 2(pn + qm)\,i, \\ a^2 - b^2 - c^2 + d^2 &= 2(p^2 - q^2 - m^2 + n^2), \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 2(p^2 - q^2 + m^2 - n^2), \\ a^2 + b^2 - c^2 - d^2 &= 4\,(pq + mn)\,i, \\ -a^2 + b^2 - c^2 + d^2 &= -4\,(pq - mn)\,i. \end{aligned}$$

Für die *Möglichkeiten* (14b) *und* (15a) aber ist

$$\begin{aligned} a &= p + iq, \\ d &= -p + iq \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} b &= m + in, \\ c &= m - in, \end{aligned}$$

d. h. gegen die vorhergehende Zusammenstellung haben d und c und damit auch die Koeffizientenzahlen $ac - bd$, $ad + bc$, $ac + bd$ nur das Vorzeichen gewechselt.

Bei diesen beiden Zusammenstellungen der Möglichkeiten sind also alle Koeffizientenzahlen reell bzw. rein imaginär, wie es nach S. 74 sein soll.

Nun wollen wir aber noch beachten, daß es ja nur auf das Verhältnis der Koeffizienten a, b, c, d ankommt. Ausgehend von den Möglichkeiten (14a) und (15b) ist aber

$$\begin{aligned} a:b:c:d &= (p + iq):(m + in):(-m + in):(p - iq) \\ &= (pi - q):(mi - n):(-mi - n):(pi + q) \\ &= (-q + pi):(-n + mi):(-n - mi):(q + pi). \end{aligned}$$

Diese letzte Darstellung gehört aber zugleich den Möglichkeiten (14b) und (15a) an, wie man sofort erkennt, wenn man noch die Zahlen $(-q)$, p, $(-n)$, m nun mit p, q, m, n bezeichnet. Wir brauchen also schließlich nur die Möglichkeiten (14a) und (15b) beizubehalten.

Es nehmen dann also die Transformationen (13a, b, c) S. 74 die Form an

$$\left.\begin{aligned} \varrho'\bar{x} &= (p^2 - q^2 - m^2 + n^2)x + 2(pm - qn)y - 2\sqrt{\varkappa}(pq + mn)s, \\ \varrho'\bar{y} &= -2(pm + qn)x + (p^2 + q^2 - m^2 - n^2)y - 2\sqrt{\varkappa}(pn - qm)s, \\ \varrho'\bar{s}\sqrt{\varkappa} &= 2(pq - mn)x + 2(pn + qm)y + \sqrt{\varkappa}(p^2 - q^2 + m^2 - n^2)s, \end{aligned}\right\} \quad (16\text{a, b, c})$$

mit der Determinante der Koeffizienten auf der rechten Seite

$$\Delta = (p^2 + q^2 + m^2 + n^2)^3, \tag{17}$$

wo dann $\Delta \neq 0$ besagt, daß nicht alle vier Zahlen p, q, m, n verschwinden dürfen. Und die zugehörigen Transformationen (7) S. 72 lauten jetzt

$$\bar{\lambda} = \frac{(p + iq)\lambda + (m + in)}{-(m - in)\lambda + (p - iq)} \tag{7'}$$

mit der Determinante $\qquad \Delta_\lambda = p^2 + q^2 + m^2 + n^2. \qquad (18)$

Wir gewinnen somit im Einklang mit dem Satze 5 S. 69 das Resultat:

7. Die Gruppe aller Bewegungen in der elliptischen Ebene wird durch die Gleichungen (16a, b, c) *dargestellt, wo p, q, m, n beliebige reelle Zahlen sind, die nicht sämtlich gleich* 0 *sein dürfen.*

Hiermit ist dann auch nachgeholt, was am Schlusse des vorigen Paragraphen gewünscht wurde. Jedenfalls erkennen wir wieder, daß sowohl in der hyperbolischen Geometrie (vgl. die Gleichungen (13a, b, c) S. 64) wie in der elliptischen Geometrie die Transformationsformeln für die Gruppe der Bewegungen doch erheblich komplizierter sind als in der euklidischen Geometrie.

§ 18. Die Einteilung der Bewegungen in bestimmte Arten bei den drei Geometrien.

Wir wollen unseren bisherigen Ausführungen über die Bewegungslehre oder Kinematik noch einige elementare Betrachtungen in den drei Geometrien anschließen. Auch jetzt noch soll bei jeder einzelnen Bewegung nur die Anfangs- und Endlage der Ebenen in Betracht kommen.

Wir wollen die allgemeine Frage aufwerfen:

Welche (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkte und Geraden der Ebene bleiben bei einer Bewegung ungeändert?

Doch wollen wir uns bei dieser Untersuchung in der euklidischen und der hyberbolischen Geometrie auf *gleichsinnige Bewegungen* (vgl. den Satz 16 S. 64) beschränken; in der elliptischen Geometrie findet ja eine Unterscheidung zwischen gleichsinnigen und ungleichsinnigen Bewegungen, wie wir wissen, überhaupt nicht statt. Natürlich könnten wir analog auch die ungleichsinnigen Bewegungen betrachten; doch werden wir nur die Resultate für die gleichsinnigen Bewegungen später verwerten.

Die Identität können wir ja im folgenden ausgeschlossen denken.

I. Wir wenden uns zunächst wegen des Vergleichs mit den anderen beiden Geometrien zur *euklidischen Geometrie,* wo ja die Verhältnisse wohlbekannt sind. Wir wissen auch bereits, daß bei jeder gleichsinnigen Bewegung die beiden imaginären Kreispunkte $(\pm i, 1, 0)$ einzeln unverändert bleiben, ebenso ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade (vgl. den Satz 7 S. 61).

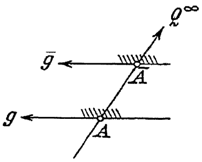


Fig. 78a.

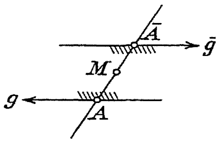


Fig. 78b.

Es sei nun angenommen, daß noch *ein reeller* (d. h. durch reelle Koordinaten darstellbarer) *unendlich ferner Punkt* P^∞ *bei der gleichsinnigen Bewegung unverändert* bliebe. Da dann auf der unendlich fernen Geraden drei Punkte unverändert bleiben, so müssen auf ihr *alle* Punkte unverändert bleiben. Es sei eine solche Bewegung nun festgelegt durch die Anfangslage g und die zu g *parallele* Endlage $\bar{g}$ einer Geraden, je mit dem Punkte A bzw. $\bar{A}$ und mit Richtung und Seite (vgl. das Axiom 2 S. 3). (Natürlich sind durch die entsprechenden Richtungen auch bereits die entsprechenden Seiten festgelegt, da es sich ja um eine gleichsinnige Bewegung handelt.) Wir können nun ersichtlich die Gerade g in die Gerade $\bar{g}$ durch eine Translation T (vgl. den Satz 3 S. 59) übergehen lassen, die durch die Strecke $\overrightarrow{A\bar{A}}$ bestimmt ist. Ist dann noch nicht die gegebene Richtung von g in die von $\bar{g}$ übergegangen, so ist noch eine Umwendung $\mathfrak{U}$ um $\bar{A}$ hinzuzufügen. Es sind nun folgende Möglichkeiten vorhanden:

Die Umwendung $\mathfrak{U}$ fällt fort (Fig. 78a); dann bleibt also nur die Translation übrig. Wir wissen: *Bei einer Translation bleibt außer den unendlich fernen Punkten kein eigentlicher Punkt unverändert und außer der unendlich fernen Geraden nur alle Parallelgeraden durch den unendlich fernen Punkt* Q^∞ *der Translationsrichtung* $\overrightarrow{A\bar{A}}$. (Wäre $A = \bar{A}$, so hätten wir es ja mit der Identität zu tun, die ausgeschlossen war.)

Fällt die Umwendung $\mathfrak{U}$ nicht fort, so haben wir die zwei Unterfälle zu unterscheiden, daß $A = \bar{A}$ ist oder nicht. Wenn $A = \bar{A}$ ist, so ist die Bewegung ja die Umwendung um A. Wir wissen: *Dann bleiben außer den unendlich fernen Punkten nur der Punkt A und außer der unendlich fernen Geraden nur die Geraden durch A unverändert.*

Wenn $\bar{A}$ nicht mit A identisch ist, so sei M die Mitte der Strecke $A\bar{A}$. Die Bewegung ist dann ersichtlich gleich der Umwendung um M (Fig. 78b). Bei einer solchen Bewegung gilt das Entsprechende wie soeben bei der Umwendung um A.

Es sei nun weiter vorausgesetzt, daß bei der gegebenen Bewegung *kein*

reeller unendlich ferner Punkt unverändert sei. Dann sehen wir sofort: Bei einer solchen gleichsinnigen Bewegung kann höchstens *ein* eigentlicher Punkt S unverändert sein. Denn würden zwei eigentliche Punkte unverändert sein, so wäre die Bewegung notwendig die Identität. Wir behaupten nun aber:

Bei einer gleichsinnigen Bewegung, bei der kein reeller unendlich ferner Punkt unverändert ist, ist stets ein eigentlicher Punkt unverändert.

Um dies zu erkennen, blicken wir zu dem Satze 15 S. 21 zurück. Die Bewegung sei wieder durch die entsprechenden Geraden $g, \bar{g}$ mit den Punkten $A, \bar{A}$ und gegebenen Richtungen und Seiten festgelegt. Auch können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß A nicht mit $\bar{A}$ identisch ist (Fig. 79). Natürlich sind jetzt $g, \bar{g}$ mit ihren Richtungen weder gleichgerichtet noch entgegengesetzt gerichtet, da sonst ja der unendlich ferne Schnittpunkt von $g, \bar{g}$ sich selbst entsprechen müßte, was ja jetzt ausgeschlossen ist. Wir konstruieren zunächst die Mittelsenkrechte m der Strecke $A\bar{A}$. Durch die Umwendung um m gehe g mit A und der gegebenen Richtung in g_0 mit $\bar{A}$ und der entsprechenden Richtung über. Durch die Umwendung $\mathfrak{W}$ um die Winkelhalbierende w des durch die beiden Richtungen von $g_0, \bar{g}$ gebildeten konkaven Winkels geht weiter die Gerade g_0 mit $\bar{A}$ und ihrer Richtung in die Gerade $\bar{g}$ mit $\bar{A}$ und der gegebenen Richtung über. Die gegebene Bewegung wird also durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{M}, \mathfrak{W}$ erzeugt. Es können aber m und w nicht zusammenfallen, da w durch $\bar{A}$ geht, m aber nicht. Es müssen sich also m, w in einem bestimmten Punkte S schneiden. Dieser Punkt bleibt bei der Aufeinanderfolge der Umwendungen unverändert; es kann aber kein unendlich ferner Punkt sein nach der Voraussetzung. Folglich ist der obige Satz nachgewiesen. Die Bewegung ist die Rotation um den Punkt S, die den Punkt A in $\bar{A}$ überführt. Der Fall, daß diese Rotation die Umwendung um S ist, ist ja bereits erledigt. Im anderen Falle bleibt kein reeller unendlich ferner Punkt unverändert und außer S kein anderer eigentlicher Punkt, ferner bleibt außer der unendlich fernen Geraden keine eigentliche Gerade unverändert.

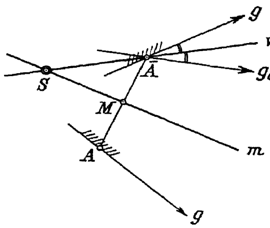


Fig. 79.

Zusammenfassend können wir also sagen:

1. Alle eigentlichen Bewegungen der Ebene zerfallen in Translationen und in Rotationen um einen eigentlichen Punkt S, und unter letzteren sind die Umwendungen um einen eigentlichen Punkt S noch besonders zu nennen. In allen diesen Fällen wissen wir genau, welche Punkte und Geraden jedesmal unverändert bleiben. Wenn kein eigentlicher Punkt unverändert ist, so ist die gleichsinnige Bewegung stets eine Translation. Die Translation und die Ro-

tation sind also dadurch leicht zu unterscheiden, daß bei ihnen bzw. kein oder ein eigentlicher Punkt unverändert ist.

Nebenbei sei noch bemerkt:

2. Die Gesamtheit aller Translationen, wie auch die Gesamtheit aller Rotationen um denselben Punkt S bilden je eine Untergruppe der Bewegungen.

II. Wir wenden uns jetzt zur *hyperbolischen Geometrie* hin: Sind hier bei einer Bewegung drei unendlich ferne Punkte unverändert, so ist die Bewegung die *Identität. Diese sowie auch die ungleichsinnigen Bewegungen seien also im folgenden ausgeschlossen.*

Es seien nun *zwei unendlich ferne Punkte P^∞, Q^∞ unverändert.* Dann ist auch ihre Verbindungsgerade g unverändert, sowie der (uneigentliche) Schnittpunkt S der Tangenten des absoluten Kegelschnittes in den Punkten P^∞, Q^∞ (Fig. 80). Es kann aber kein weiterer Punkt, weder ein eigentlicher noch ein uneigentlicher, unverändert sein. Denn wäre noch der eigentliche oder uneigentliche Punkt T unverändert, der nicht auf g oder den Tangenten liegt, so wären ja vier Punkte P^∞, Q^∞, S, T der projektiven Ebene unverändert, von denen keine drei in einer Geraden liegen, d. h. die Bewegung wäre die Identität. Wäre aber noch ein eigentlicher oder uneigentlicher Punkt von g unverändert, so müßten alle Punkte von g unverändert sein. Eine solche Bewegung wäre aber entweder die Umwendung um g, d. h. eine ungleichsinnige Bewegung, oder die Identität, was ausgeschlossen ist. (Denn dann müßte ja g mit einem eigentlichen Punkt A und der einen Richtung von A unverändert bleiben.) Wäre aber noch ein Punkt B der einen Tangente, etwa von $P^\infty S$ unverändert, so müßten nicht nur alle Punkte von $P^\infty S$ unverändert sein, sondern auch der zweite Schnittpunkt von $Q^\infty B$ mit dem Kegelschnitt, was wieder die Identität bedingen würde. Wir haben das Resultat gewonnen:

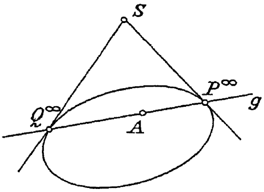


Fig. 80.

3. Bleiben bei einer gleichsinnigen Bewegung der hyperbolischen Ebene zwei unendlich ferne Punkte P^∞, Q^∞ unverändert, so bleibt nur noch der überunendlich ferne Schnittpunkt S ihrer Tangenten unverändert und also außer den drei Geraden $P^\infty Q^\infty$, $P^\infty S$ und $Q^\infty S$ auch keine andere Gerade. (Eine beliebige andere Gerade würde ja eine der Geraden $P^\infty Q^\infty$, $P^\infty S$ und $Q^\infty S$ in einem von P^∞, Q^∞, S verschiedenen Punkte schneiden, der dann auch unverändert bleiben müßte.)

Es sei nun nur ein unendlich ferner Punkt P^∞ unverändert und damit auch seine Tangente (Fig. 81). Wir können sogleich behaupten, daß dann auch kein eigentlicher oder überunendlich ferner Punkt A noch unverändert sein kann. Denn ist A nicht auf der Tangente von P^∞ gelegen, so müßte auch der zweite

Schnittpunkt von AP^∞ mit dem absoluten Kegelschnitt unverändert sein, was ja ausgeschlossen ist. Ist aber A ein Punkt der Tangente von P^∞, so müßte auch die absolute (durch P^∞) gehende Polare von $\bar{A}$ unverändert sein und damit auch ihr zweiter Schnittpunkt mit dem absoluten Kegelschnitt, was auch ausgeschlossen ist. Auch kann keine andere Gerade außer der Tangente von P^∞ unverändert sein. Denn eine andere durch P^∞ gehende unveränderte Gerade müßte ja auch bedingen, daß ihr zweiter Schnittpunkt mit dem absoluten Kegelschnitt unverändert wäre, und eine andere nicht durch P^∞ gehende unveränderliche Gerade g würde bedingen, daß auch ihr Schnittpunkt mit der Tangente von P^∞ unverändert wäre. Also gewinnen wir das Resultat:

4. Bleibt bei einer gleichsinnigen Bewegung der hyperbolischen Ebene nur e*in* *unendlich ferner Punkt unverändert, so bleibt nur noch seine Tangente unverändert, sonst kein anderer Punkt oder eine andere Gerade.*

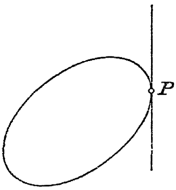


Fig. 81.

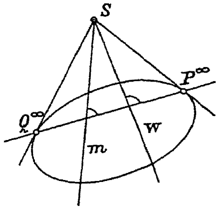


Fig. 82.

Es sei endlich *kein unendlich ferner Punkt unverändert.* Dann ist auch keine Tangente des absoluten Kegelschnittes unverändert. Die Bewegung sei wieder, wie S. 79, durch „g, A, Richtung und Seite“ und „$\bar{g}, \bar{A}$, Richtung und Seite“ bestimmt (vgl. auch die Fig. 79 S. 79). Natürlich sind A und $\bar{A}$ eigentliche Punkte, die wieder als voneinander verschieden vorausgesetzt werden können. Durch die Umwendung $\mathfrak{M}$ um die Mittelsenkrechte m der Strecke $A\bar{A}$ geht g mit A, Richtung und Seite in die Gerade g_0 mit $\bar{A}$ und bestimmter Richtung und Seite über. Dann geht $g_0, \bar{A}$ mit Richtung und Seite durch die Umwendung $\mathfrak{W}$ um die Winkelhalbierende w des konkaven Winkels der Richtungen von $g_0, \bar{g}$ in $\bar{g}$ mit $\bar{A}$ und gegebener Richtung und Seite über. Die gegebene Bewegung wird also wieder durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{W}$ erzeugt, wo wieder m und w nicht zusammenfallen können. Es sei nun S der Schnittpunkt von m, w. Dieser Punkt S bleibt dann bei der gegebenen Bewegung unverändert. Nach der Voraussetzung kann S kein unendlich ferner Punkt sein. Wäre nun S ein überunendlich ferner Punkt und $P^\infty Q^\infty$ seine absolute Polare, so blieben bei der Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen die Punkte P^∞ und Q^∞ einzeln unverändert (Fig. 82). Dies ist aber auch ausgeschlossen. Es muß dann also S ein eigentlicher Punkt sein. Ein besonderer Fall der Bewegung ist die Umwendung um den Punkt S. Wir wissen (vgl. den Satz 6 S. 13):

5a. Bei der Umwendung um S bleiben außer S nur noch die Punkte der absoluten Polaren von S unverändert und außer der absoluten Polaren nur noch die Geraden durch S.

5b. Ist aber die Bewegung nicht die Umwendung um S, so kann außer S kein anderer Punkt unverändert bleiben und auch keine andere Gerade außer der absoluten Polaren von S.

Denn würde noch ein anderer eigentlicher Punkt unverändert bleiben, so ist die Bewegung die Identität. Wäre aber noch ein uneigentlicher Punkt T unverändert, so wäre auch die Gerade ST unverändert, die Bewegung also notwendig die Umwendung um S oder die Identität.

Zusammenfassend erhalten wir also folgendes Resultat:

6. Alle eigentlichen Bewegungen der hyperbolischen Ebene zerfallen in drei Klassen, je nachdem zwei, einer oder kein unendlich ferner Punkt unverändert ist. Es ist dann bzw. nur noch ein überunendlich ferner Punkt unverändert oder kein anderer Punkt oder ein eigentlicher Punkt S und außerdem, falls die Bewegung die Umwendung um S ist, noch jeder Punkt der absoluten Polaren von S. Mit jedem unveränderten Punkte ist auch dessen absolute Polare unverändert.

7. Diese drei Arten der Bewegungen wollen wir als Drehungen bzw. um einen überunendlich fernen Punkt oder um einen unendlich fernen Punkt oder um einen eigentlichen Punkt bezeichnen.

8. Alle Drehungen bzw. um denselben überunendlich fernen oder unendlich fernen oder eigentlichen Punkt bilden eine Untergruppe der Bewegungen.

Wir können also die *gleichsinnigen* Bewegungen in der hyperbolischen Ebene im folgenden Schema übersichtlich angeben:

Allgemeine gleichsinnige Bewegungen:
(außer der Identität)

ein eigentlicher Punkt unverändert: Drehung um den eigentlichen Punkt S.

kein eigentlicher Punkt unverändert, aber ein unendlich ferner Punkt P^∞ unverändert

- kein überunendlich ferner Punkt unverändert: Drehung um den unendlich fernen Punkt P^∞.
- *ein* überunendlich ferner Punkt S unverändert: Drehung um den überunendlich fernen Punkt S.

III. Endlich wollen wir die Bewegungen in der *elliptischen Geometrie* analog uns ansehen. Wir haben ja nun nicht mehr zwischen gleichsinnigen und ungleichsinnigen Bewegungen zu unterscheiden. Eine besondere Bewegung ist ja die Umwendung um eine Gerade s, die identisch ist mit der Umwendung um den absoluten Pol S von s.

9. Bei der Umwendung um S, s bleiben, wie wir wissen, außer S nur noch alle Punkte von s unverändert und außer s nur noch alle Geraden durch S.

Dieser Fall sei im folgenden, ebenso wie die Identität, ausgeschlossen. Bei jeder anderen Bewegung aber können ersichtlich nicht *zwei* Punkte A, B unverändert sein. Denn sonst ist auch ihre Verbindungslinie $AB = g$ unverändert. Dann aber bleiben vier Bewegungen möglich, bei denen g in sich übergeht, je nachdem nämlich eine bestimmte Richtung von g und eine bestimmte Seite in der Umgebung von A in die gleiche Richtung bzw. die gleiche Seite übergeht oder in die entgegengesetzte Richtung bzw. die entgegengesetzte Seite. Von diesen vier Bewegungen ist die eine die Identität, eine andere die Umwendung um g, die dritte ist die Umwendung um A und die vierte die Umwendung um die Senkrechte in A zu g. Ist die Bewegung keine Umwendung, so können also keine zwei Punkte unverändert sein.

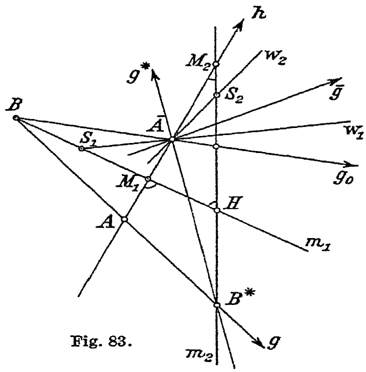


Fig. 83.

Die einzelne Bewegung sei nun wieder durch die entsprechenden Geraden $g, \bar{g}$ mit den Punkten $A, \bar{A}$ und gegebenen Richtungen und Seiten festgelegt. Auch seien wieder A und $\bar{A}$ verschiedene Punkte. Wir wollen auch die Gerade $A\bar{A} = h$ mit einer Richtung versehen. Es gibt ja nun sowohl die Mitte M_1 der Strecke $\overrightarrow{A\bar{A}}$ wie die Mitte M_2 der Strecke $\overrightarrow{\bar{A}A}$ und demnach auch die zwei Mittelsenkrechten $M_1H = m_1$ und $M_2H = m_2$, wo H der absolute Pol von h ist (Fig. 83). Es ist also M_1M_2H ein absolutes Polardreieck und $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2M_1} = \frac{l}{2}$. Wir verwenden zunächst die Mittelsenkrechte m_1 von $A\bar{A}$. Durch die Umwendung $\mathfrak{M}_1$ um sie gehe g mit A, Richtung und Seite in g_0 mit $\bar{A}$ und entsprechender Richtung und Seite über. (Entsprechende Richtungen und Seiten von g, g_0 ergeben sich leicht, wenn wir die Umgebung des auf m_1 liegenden Schnittpunktes B von g, g_0 betrachten.) Darauf zeichnen wir die Winkelhalbierende w_1 des von den beiden Richtungen $g_0, \bar{g}$ gebildeten konkaven Winkels und wenden nun auf g_0 mit $\bar{A}$, Richtung und Seite die Umwendung $\mathfrak{W}_1$ um w_1 an. Dann erhalten wir hieraus die Gerade $\bar{g}$ mit $\bar{A}$ und der gegebenen Richtung, jedoch ist noch nicht gesagt, daß auch die Seite von g_0 in die Seite von $\bar{g}$ übergeht.

Wir führen nun die analoge Konstruktion von der Umwendung $\mathfrak{M}_2$ um m_2 ausgehend aus. Durch diese gehe g mit A, Richtung und Seite in g^* mit $\bar{A}$ und entsprechender Richtung und Seite über. Darauf zeichnen wir die Winkelhalbierende w_2 des von den beiden Richtungen $g^*, \bar{g}$ gebildeten konkaven Winkels und wenden nun auf g^* mit $\bar{A}$, Richtung und Seite die Umwendung

$\mathfrak{W}_2$ um w_2 an. Dann erhalten wir hieraus wieder die Gerade $\bar{g}$ mit $\bar{A}$ und der gegebenen Richtung, jedoch ist wieder noch nicht gesagt, daß auch die Seite von g^* in die Seite von $\bar{g}$ übergeht.

Wir betrachten nun die Aufeinanderfolgen $\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_2$ und behaupten: *Die durch sie bestimmten beiden Bewegungen können nicht identisch sein.* Denn bei $\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1$ bleibt S_1 unverändert, aber kein anderer Punkt, bei $\mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_2$ aber S_2 und kein anderer Punkt. Es müßte also, wenn $\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1 \equiv \mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_2$ wäre, $S_1 = S_2$ sein, d. h. es müßten m_1, m_2, w_1, w_2 durch denselben Punkt gehen und zwar durch den absoluten Pol H von h, da durch H ja m_1 und m_2 gehen. Dann aber müßte $w_1 = w_2$ sein, da beide ja auch durch $\bar{A}$ gehen. Dann aber wäre $\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}_2$. Aus $\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1 \equiv \mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_2 \equiv \mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_1$ folgt aber

$$\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_1 \equiv \mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_1\mathfrak{W}_1$$

oder

$$\mathfrak{M}_1 \equiv \mathfrak{M}_2 .$$

Dies aber ist unmöglich, da m_1 und m_2 verschieden sind. Dann aber muß notwendig *eine* der beiden Bewegungen $\mathfrak{M}_1\mathfrak{W}_1$ oder $\mathfrak{M}_2\mathfrak{W}_2$ mit der gegebenen Bewegung identisch sein, da nur eine von beiden auch die gegebene Seite von g in die gegebene Seite von $\bar{g}$ überführen muß. Hiermit ist aber bewiesen:

10. Bei jeder von der Identität und der Umwendung verschiedenen Bewegung der elliptischen Ebene bleibt stets nur ein Punkt S und nur eine Gerade, die absolute Polare von S, unverändert.

11. In der elliptischen Geometrie gibt es also nur eine Art von Bewegungen, die Drehungen um einen beliebigen Punkt S, mit dem speziellen Falle der Umwendung um einen Punkt S.

Vierter Abschnitt.

Die Metrik, d. h. die Länge einer Strecke und die Größe eines Winkels, in den drei Geometrien.

§ 19. Die Einordnung der euklidischen Metrik in die projektive Geometrie.

Ganz allgemein haben wir uns unter dem Begriff einer *Strecke* in der *euklidischen Geometrie*, die wir zunächst betrachten wollen, in projektiver Auffassung ja folgendes zu denken: Es seien auf einer Geraden g zwei Punkte A, B gegeben; ferner sei P^∞ der unendlich ferne Punkt der Geraden g. Es gilt dann die *Definition: Unter der „Strecke" AB verstehen wir die Gesamtheit aller Punkte der Geraden g, die durch A, B von P^∞ getrennt sind* (mit anderen Worten: die *zwischen* A, B liegen, wobei der Begriff „zwischen" eben ein ursprünglicher ist, vgl. Bd. I S. 19).

Ferner sei an die *Definition des konkaven bzw. konvexen Winkels für zwei von einem Punkte S ausgehende Richtungen erinnert* (Satz 2 S. 15), *wonach der einzelne Winkel der Inbegriff bestimmter von S ausgehender Strahlenrichtungen ist.*

Jetzt soll es sich um die wichtige Frage handeln: *Wie kann man die „Größe" einer Strecke oder eines Winkels durch eine bestimmte Maßzahl definieren?*

Wir wollen uns zunächst kurz vor Augen halten, wie in der Schulgeometrie diese Frage beantwortet wird. Doch wollen wir der Einfachheit halber sogleich die Hilfsmittel der analytischen Geometrie benutzen:

1. Ist ein Punkt A durch die (kartesischen) Koordinaten x, y gegeben, so ist die Größe der Strecke OA, wo O der Koordinatenanfangspunkt ist (oder die Entfernung, der Abstand des Punktes A vom Koordinatenanfangspunkt O), durch die Formel gegeben

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

2. Sind zwei Punkte A, B durch die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben, so ist die Größe der Strecke AB (oder die Entfernung der Punkte A, B) durch die Formel gegeben

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

3. Ist eine Gerade g durch den Anfangspunkt O gegeben durch die Gleichung

$$ax + by = 0 \; (b \geqq 0), \tag{3}$$

so ist die Größe des (absolut genommenen) konkaven Winkels, den die eine oder andere positive Richtung der Geraden mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi &= \frac{+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4a, b}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\psi &= \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\psi &= \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{4'a, b}$$

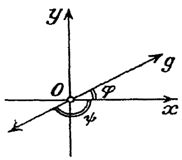


Fig. 84a.

wo $\sqrt{a^2+b^2}$ stets das positive Vorzeichen haben soll. Für $b > 0$ geben die ersten Formeln den spitzen, die letzten den stumpfen Winkel (Fig. 84a, b).

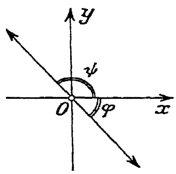


Fig. 84b.

4. Sind aber zwei beliebige Geraden g_1, g_2 durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \quad (b_1 \geqq 0) \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \quad (b_2 \geqq 0) \end{aligned}\right\} \tag{5a, b}$$

ihre Parallelen h_1, h_2 durch den Anfangspunkt O also durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= 0, \\ a_2 x + b_2 y &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6\,\text{a, b})$$

gegeben (Fig. 85), *so ist die Größe des einen oder anderen konkaven Winkels, der von zwei positiven Richtungen des einen oder anderen Geradenpaares gebildet wird, durch die Gleichungen gegeben:*

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= -\cos\psi = \pm \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \\ \sin\varphi &= \sin\psi = \frac{|a_1 b_2 - b_1 a_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \end{aligned} \qquad (7\,\text{a, b})$$

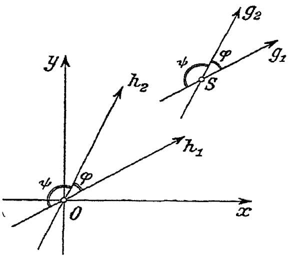


Fig. 85.

wo die Wurzeln stets das positive Vorzeichen haben sollen. Ist der Winkel φ der spitze, der Winkel ψ der stumpfe Winkel, so gilt natürlich für φ das obere bzw. das untere Vorzeichen, wenn bzw. $a_1 a_2 + b_1 b_2 \gtrless 0$ ist.

5. Zwei Geraden (5 a, b) *stehen aufeinander senkrecht, wenn $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ ist.*

Alle diese Formeln für die Größe einer Strecke oder eines Winkels wollen wir nun von dem höheren Standpunkte unserer projektiven Kenntnisse beleuchten. Wir wollen im Hinblick hierauf erst aber *die eigenartige Bedeutung der imaginären Kreispunkte in der euklidischen Geometrie* noch näher uns ansehen. Zunächst wollen wir den Satz beweisen:

6. Die imaginären Kreispunkte sind ein spezieller zerfallender Kegelschnitt und stellen den Übergangsfall dar zwischen dem einteiligen absoluten Kegelschnitt der hyperbolischen Geometrie und dem nullteiligen absoluten Kegelschnitt der elliptischen Geometrie, also den absoluten Kegelschnitt der euklidischen Geometrie.

Um diese Verhältnisse anschaulich zu überblicken, wollen wir einmal zunächst von den Gleichungen der Ellipse und Hyperbel in der euklidischen Geometrie ausgehen:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (8\,\text{a, b})$$

Die Gleichung einer Tangente im Punkte (x_0, y_0) der Ellipse lautet dann

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

die (unhomogenen) Linienkoordinaten der Tangente also

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x_0}{} \\ v &= -\frac{y_0}{b^2}. \end{aligned} \qquad (9\,\text{a, b})$$

Hieraus folgt
$$x_0 = -a^2 u,$$
$$y_0 = -b^2 v.$$

Da aber (x_0, y_0) der Ellipsengleichung genügen, so folgt

$$a^2u^2 + b^2v^2 = 1. \tag{10}$$

7. *Die Dualform der Gleichungen* (8a, b) (vgl. Bd. I S. 160) *für die Ellipse und Hyperbel ist also*

$$a^2u^2 \pm b^2v^2 = 1. \tag{11a, b}$$

Für $\lim b = 0$ ergeben die Gleichungen (8a, b) und (11a, b) nun

$$y^2 = 0, \tag{8*}$$

d. h. die doppelte x-Achse als ausgeartete Kurve 2. Ordnung und

$$u = \pm \frac{1}{a}, \tag{11*}$$

d. h. zwei Strahlenbüschel mit den Trägern $x = \pm a$, $y = 0$ als ausgeartete Kurve zweiter Klasse.

8. *Die doppelte x-Achse ist also ein Übergang zwischen den als Kurven 2. Ordnung aufgefaßten Ellipsen und Hyperbeln, und zugleich sind die beiden Strahlenbüschel der Übergang zwischen den als Kurven zweiter Klasse (d. h. als Umhüllungsgebilde ihrer Tangenten) aufgefaßten Ellipsen und Hyperbeln.* (Die Fig. 86a stellt die Ellipse und Hyperbel für einen sehr kleinen Wert b dar; die Fig. 86b den Grenzfall selbst.)

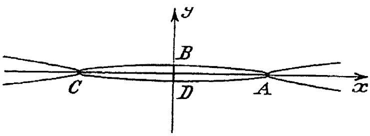


Fig. 86a.

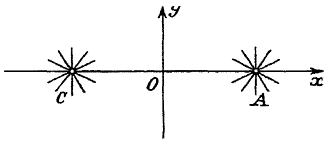


Fig. 86b.

Ganz analog liegen nun die Verhältnisse bei dem Satze 6. Die Gleichungen der absoluten Kegelschnitte in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie sind ja (vgl. den Satz 12 S. 42 und den Satz 7 S. 54)

$$x^2 + y^2 \pm \varkappa s^2 = 0 \tag{12a, b}$$

und ihre Dualformen
$$u^2 + v^2 \pm \frac{1}{\varkappa} t^2 = 0 \tag{13a, b}$$

(vgl. den Satz 3 Bd. I S. 160), wo $\varkappa$ eine sehr große positive Zahl ist. Nun sei $\lim \varkappa = \infty$. Die Gleichungen (12a, b) und (13a, b) gehen dann über in die Gleichung

$$s^2 = 0, \tag{12*}$$

d. h. in die doppelt zählende unendlich ferne Gerade der euklidischen Ebene, und in die Gleichung

$$u^2 + v^2 = 0 \tag{13*}$$

oder
$$u \pm iv = 0, \tag{14a, b}$$

d. h. in zwei Strahlenbüschel mit den Trägern $(x, y, s) = (1, \pm i, 0)$ auf der unendlich fernen Geraden oder mit den imaginären Kreispunkten als Trägern.

9. *Die doppelte Gerade $s = 0$ bzw. die Strahlenbüschel $u \pm iv = 0$ stellen also den zerfallenden Übergangskegelschnitt dar zwischen den verschiedenen möglichen absoluten Kegelschnitten der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie und somit den absoluten Kegelschnitt der euklidischen Geometrie.* (Vgl. auch die Figuren 52 S. 38 und 65 S. 52; im Falle der euklidischen Geometrie fallen ja die Punkte E_1' und E_2' bzw. mit P, Q zusammen.)

Wie jeder nicht zerfallende Kegelschnitt bedingt auch der zerfallende Kegelschnitt (12*), (14a, b) eine zugehörige Polarenverwandtschaft. Dies ist natürlich das *absolute Polarsystem der euklidischen Geometrie,* welches wir auch bereits S. 29ff. im § 10 entwickelt haben. Für diese Polarenverwandtschaft ergibt sich aus der Gleichung (12*) die Gleichung

$$ss_0 = 0 \tag{15}$$

und dual aus der Gleichung (13*) analog

$$uu_0 + vv_0 = 0. \tag{16}$$

Nach der Gleichung (15) entspricht dann jedem eigentlichen Punkte $(x_0, y_0, s_0 \neq 0)$ die unendlich ferne Gerade $s = 0$ als absolute Polare und nach der Gleichung (16) jeder eigentlichen Geraden (u_0, v_0, t_0), wo also nicht gleichzeitig $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ ist — (die unendlich ferne Gerade hat ja die Linienkoordinaten 0, 0, 1) — der unendlich ferne Punkt $uu_0 + vv_0 = 0$ oder $x : y : s = u_0 : v_0 : 0$. Allen Parallelgeraden (u_0, v_0, t_0) oder $u_0x + v_0y + t_0s = 0$, für die ja $u_0 : v_0$ denselben Wert hat, entspricht derselbe unendlich ferne Punkt $x : y : s = u_0 : v_0 : 0$ als absoluter Pol (vgl. die Sätze 1 und 2 S. 29). Das absolute Polarsystem der euklidischen Ebene ist also, wie wir ja auch schon wissen (vgl. den Satz 7 S. 30), ein ausgeartetes Polarsystem, analog wie die parabolische Involution ausgeartet ist.

Gewisse *Eigenarten der imaginären Kreispunkte* haben wir ja schon in dem Satze 9 S. 32 und in dem Satze 5 S. 60 hervorgehoben. Diesen wollen wir noch einige elementare Eigenschaften anschließen.

Sehr eigenartig sind die Geraden $x \pm iy = 0$, d. h. die Verbindungslinien des Koordinatenanfangspunktes (0, 0, 1) mit dem einen oder anderen imaginären Kreispunkte $(1, \pm i, 0)$. Wenn wir dem Satze 1 S. 85 die entsprechende Ausdehnung geben, so ergibt sich nun das eigenartige Resultat:

10. *Jeder allgemeine Punkt dieser Geraden hat vom Koordinatenanfangspunkt eine verschwindende Entfernung.*

Die Formel (1) S. 85 lautet nun in homogenen Koordinaten

$$OA = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{s^2}}. \tag{17}$$

Für die Kreispunkte ist aber $x^2 + y^2 = 0$ und $s = 0$, d. h.:

11. Die Entfernung der Kreispunkte selbst vom Koordinatenanfangspunkt ist unbestimmt.

Natürlich gilt das Analoge auch von den Verbindungslinien eines *beliebigen* eigentlichen Punktes mit den imaginären Kreispunkten. Alle solche Verbindungslinien nennt man dem Satze 10 gemäß *Minimalgeraden.*

Denkt man bei zwei beliebigen eigentlichen Punkten A, B den Punkt A mit dem imaginären Kreispunkt J_1 und B mit J_2 verbunden, so schneiden sich diese Minimalgeraden in einem komplexen Punkte C. Dann ist aber die Streckensumme $AC + CB = 0$, d. h. man kann zwei beliebige Punkte A, B durch einen Linienzug verschwindender Länge verbinden.

Sollen beide Gleichungen (6a, b) S. 86 durch die Gleichung $x + iy = 0$ gegeben sein, so ergibt der Satz 5 bei entsprechender Ausdehnung den weiteren Satz:

12. Jede Minimalgerade steht auf sich selbst senkrecht.

Doch dies nur nebenbei.

Nun aber müssen wir zu den Formeln (2) und (7a, b) der euklidischen Maßgeometrie zurückblicken. *Wir wollen nun sehen, wie diese Formeln in projektiver Hinsicht mit den imaginären Kreispunkten zusammenhängen.* Wir haben uns zunächst des Satzes 10 S. 33 zu erinnern, wonach das Doppelverhältnis zweier zueinander senkrechter Strahlen und der beiden von ihrem Schnittpunkte ausgehenden Minimalgeraden gleich -1 ist. Diesen Satz gilt es jetzt zu verallgemeinern.

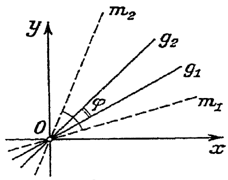


Fig. 87.

Es seien irgend zwei (nicht parallele) Geraden g_1, g_2 gegeben. Zu ihnen denken wir wieder die beiden Minimalgeraden ihres Schnittpunktes hinzu (Fig. 87). Es liegt nahe, auch hier jetzt einmal das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen zu berechnen. Wir wollen zunächst annehmen, daß alle vier Strahlen vom Koordinatenanfangspunkt ausgehen. Die Gleichungen der beiden Minimalgeraden m_1, m_2 sind dann

$$\left.\begin{aligned} x + iy &= 0, \\ x - iy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18a, b}$$

Jede andere Gerade durch den Koordinatenanfangspunkt O läßt sich dann in der Form darstellen

$$(x + iy) + \lambda\,(x - iy) = 0$$

oder

$$x\,(1 + \lambda) + y\,(1 - \lambda)\,i = 0,$$

wo der Parameter λ für eine gegebene Gerade einen bestimmten Wert hat. Denn ist irgendeine solche Gerade durch die Gleichung

$$ax + by = 0$$

gegeben, so ergibt sich aus der Proportion

$$a : b = (1 + \lambda) : (1 - \lambda)\, i$$

$$\lambda = \frac{ai - b}{ai + b} = \frac{a + ib}{a - ib}. \tag{19}$$

Es seien nun zwei Geraden g_1, g_2 durch O durch die Gleichungen gegeben

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = 0, \\ a_2 x + b_2 y = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20 a, b}$$

oder

$$\begin{aligned} (x + iy) + \lambda_1 (x - iy) = 0, \\ (x + iy) + \lambda_2 (x - iy) = 0. \end{aligned} \tag{21 a, b}$$

Wir können auch der Einfachheit halber noch voraussetzen, daß bei entsprechend gewählten Vorzeichen von a_2, b_2 jetzt $a_1 a_2 + b_1 b_2 \geqq 0$ ist und bei entsprechender Bezeichnung der gegebenen Geraden als g_1, g_2 $a_1 b_2 - b_1 a_2 \geqq 0$ ist (vgl. die Formeln (7a, b) S. 86). Das Doppelverhältnis der vier Geraden (18a, b) und (21a, b) ist dann im Hinblick auf die Formeln (19)

$$D = (m_1 m_2 g_1 g_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_1 - ib_1} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 + ib_2}$$

(vgl. z. B. den Satz 10 Bd. I S. 106). Andererseits bilden wir gemäß den Formeln (7a, b)

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_1 b_2 - b_1 a_2)}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$$\frac{(a_1 - ib_1)(a_2 + ib_2)}{\sqrt{(a_1 + ib_1)(a_1 - ib_1)}\sqrt{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)}} = \sqrt{\frac{a_1 - ib_1}{a_1 + ib_1}\,\frac{a_2 + ib_2}{a_2 - ib_2}}.$$

Es ist also

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{D}}$$

oder

$$\varphi = \frac{i}{2} \log \operatorname{nat} D. \tag{22}$$

13. Hiermit ist also der Winkel zweier Geraden in projektiver Weise durch das Doppelverhältnis der Geraden mit den beiden Minimalgeraden ihres Schnittpunktes bestimmt.

Diese wichtige Formel ist im Jahre 1853 von *Laguerre*[1]) im Alter von 19 Jahren gefunden. Ihre Entdeckung bedeutet die Geburtsstunde der

1) Laguerre (1834—1866), Sur la théorie des foyers, Nouv. Ann. t. XII, p. 57, 1853; Œuvres de Laguerre, t. II, p. 12—13, Paris 1902.

modernen nichteuklidischen Geometrie, die freilich erst aus ihrem Dämmerzustande des Säuglingsalters durch den genialen Blick von Felix Klein im Jahre 1871 erweckt werden sollte. Das Verständnis für die tiefere Bedeutung der Formel wird uns natürlich erst später aufgehen. Wir wollen nur noch hervorheben, daß das Doppelverhältnis D stets den absoluten Betrag 1 besitzt. Denn es ist ja

$$\frac{a_1 + i b_1}{a_1 - i b_1} = \frac{(a_1^2 - b_1^2) + 2 a_1 b_1 i}{a_1^2 + b_1^2},$$

also

$$\left|\frac{a_1 + i b_1}{a_1 - i b_1}\right|^2 = \frac{(a_1^2 - b_1^2) + 4 a_1^2 b_1^2}{(a_1^2 + b_1^2)^2} = 1.$$

Und das Analoge gilt für $\frac{a_2 + i b_2}{a_2 - i b_2}$. Das Doppelverhältnis D hat also die Form $e^{i\sigma}$, wo σ reell ist. Es ist also $\frac{i}{2} \log \operatorname{nat} D = -\frac{\sigma}{2}$, von der Periode $2 i \pi$ des Logarithmus abgesehen.

Nun müssen wir auch versuchen, die Formel (1) S. 85 oder (17) S. 89 für die Entfernung OA projektiv zu deuten.[1]) Zu den Punkten $O = (0, 0, 1)$ und $A = (x_0, y_0, s_0)$ nehmen wir noch einen beliebigen Punkt S mit den Koordinaten (α, β, γ) hinzu. Insbesondere kann der Einheitspunkt E_1 der x-Achse (mit den Koordinaten (1, 0, 1)) als Punkt S gewählt werden.

Dann ist
$$\frac{OA}{OS} = \sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{s_0^2}} \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}} \tag{23}$$

$\left(\text{Ist } S = E_1, \text{ so ist ja } OS = 1 \text{ und } \sqrt{\frac{\gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}} = 1.\right)$

In der höchst schematischen Fig. 88 sind durch die gestrichelten Linien die unendlich ferne Gerade mit ihren imaginären Kreispunkten J_1, J_2, die von O ausgehenden Minimalgeraden m_1, m_2 mit den Gleichungen $x \pm iy = 0$ und die von A und S ausgehenden Minimalgeraden angedeutet. Durch den imaginären Kreispunkt J_1 gehen also die zwei Geraden

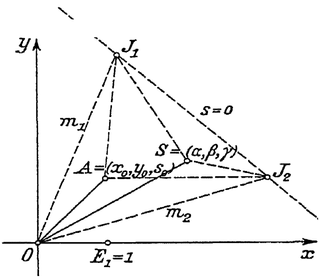


Fig. 88.

$$\begin{aligned} x + iy &= 0, \\ s &= 0 \end{aligned} \tag{24 a, b}$$

und die Geraden AJ_1, SJ_1 mit den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} (x + iy) + \lambda_1 s &= 0, \\ (x + iy) + \lambda_2 s &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{24 c, d}$$

1) Eine solche Deutung ist zuerst von F. Klein in seiner Arbeit gegeben: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, 1871, S. 611, abgedruckt: Gesammelte math. Abh. Bd. I, Berlin 1921, S. 291.

Da die Gleichung (24c) durch die Koordinaten (x_0, y_0, s_0) und die Gleichung (24d) durch die Koordinaten (α, β, γ) erfüllt ist, so ist

$$\lambda_1 = -\frac{x_0 + i\,y_0}{s_0},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\alpha + i\beta}{\gamma}.$$

Das Doppelverhältnis D_1 dieser vier Geraden durch J_1 ist

$$D_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{x_0 + i\,y_0}{s_0} \cdot \frac{\gamma}{\alpha + i\beta}.$$

Analog ist das Doppelverhältnis D_2 der vier Geraden durch J_2

$$D_2 = \frac{x_0 - i\,y_0}{s_0} \cdot \frac{\gamma}{\alpha - i\beta}.$$

Also ergibt sich $$\frac{OA}{OS} = \sqrt{D_1\,D_2}$$

oder, falls $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 0, 1)$, also $OS = 1$ ist,

$$OA = \sqrt{D_1\,D_2}. \tag{25}$$

Diese Formel läßt sich auch leicht auf den allgemeinen Fall der Entfernung $A\,B$ zweier beliebiger Punkte übertragen.

14. Durch die nicht minder wichtige Formel (25) *ist also auch die Entfernung zweier Punkte in projektiver Weise durch Doppelverhältnisse gedeutet.*

Wir wollen nur noch darauf hinweisen, daß die Festlegung der Entfernung zweier Punkte durch eine Maßzahl natürlich die Annahme einer Einheitsstrecke voraussetzt. Bei der Festlegung der Größe eines Winkels aber ist hier zu beachten, daß der volle Winkel gleich 2π, der rechte Winkel also gleich $\frac{\pi}{2}$ sein soll.

§ 20. Die Länge einer Strecke in der hyperbolischen Geometrie.

Wir wenden uns nun zur *Metrik der hyperbolischen Geometrie*, d. h. zu der Frage:

Wie werden wir hier jeder Strecke und jedem Winkel eine Maßzahl zuordnen, die deren Größe bezeichnen soll?

Wir wollen zunächst die Maßzahl einer *Strecke* $\overrightarrow{AB}$ entwickeln. Es soll sich — wenigstens vorerst — natürlich nur um eine Strecke als den Inbegriff aller Punkte zwischen zwei eigentlichen Punkten A, B einer Geraden g handeln, d. h. aller Punkte, die durch A, B von dem einen wie dem anderen unendlich fernen Punkt getrennt sind. Es soll vorausgesetzt sein, daß bei positiver Durchlaufung des im Innern des Kegelschnittes gelegenen Teiles von g wir die folgende

Reihenfolge V, A, B, U der Punkte antreffen (Fig. 89). Wir nennen ja nun zwei Strecken AB und $\bar{A}\bar{B}$ gleich, die durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden können. Soll der Punkt A hierbei dem Punkte $\bar{A}$ und damit die Richtung $\overrightarrow{AB}$ in die Richtung $\overrightarrow{\bar{A}\bar{B}}$ übergehen, so kann die genannte Bewegung noch eine gleichsinnige oder ungleichsinnige sein. Bei beiden Bewegungen aber entsprechen die bestimmten unendlich fernen Punkte $U, \bar{U}$ und $V, \bar{V}$ einander. Es ist dann auch

$$(UVAB) = (\bar{U}\bar{V}\bar{A}\bar{B}). \tag{1}$$

Wir könnten meinen, daß vielleicht das Doppelverhältnis $(UVAB)$ selbst demgemäß als Maßzahl für die Strecke AB geeignet wäre, da dies doch eine Invariante bei allen hyperbolischen Bewegungen ist. Es gilt eben allgemein der Satz: *Zwei Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{\bar{A}\bar{B}}$ sind stets und nur dann einander gleich, wenn die Gleichung* (1) *erfüllt ist.* Ist z. B. auf der Geraden g ein projektives Abszissensystem bestimmt, bei dem die in der positiven Richtung aufeinander folgenden Punkte V, A, B, U die Abszissen $0, 1, x, \infty$ besitzen, so ist

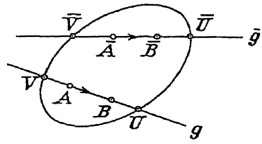


Fig. 89.

$$(UVAB) = (\infty\, 0\, 1\, x) = x \tag{2}$$

(vgl. den Satz 4 Bd. I S. 104). Wir erkennen dann auch: Eine größere bzw. kleinere (positive) Strecke der x-Achse hat dann also auch einen größeren oder kleineren Wert des Doppelverhältnisses. Hierbei gilt die Definition: *Von zwei gleichgerichteten Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ ist $\overrightarrow{AC}$ die größere oder kleinere, je nachdem B zwischen A, C oder C zwischen A, B liegt.*

Doch wenn $A = B$ ist, so ist das Doppelverhältnis

$$(UVAB) = 1, \tag{3}$$

während wir doch der Strecke AA die Maßzahl 0 zuordnen wollen. Für drei (eigentliche) in der Reihenfolge A, B, C aufeinander folgende Punkte der Geraden g soll ferner auch für die Strecken gelten

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \textit{(Additionstheorem der Strecken einer Geraden).} \tag{4}$$

Sind nun diese Punkte A, B, C in dem Abszissensystem, in dem V, U die Abszissen $0, \infty$ besitzen (und auch wie immer bei der positiven Durchlaufung von g die Punkte in der Reihenfolge V, A, B, C, U aufeinander folgen mögen), durch die Abszissen $1, x_1, x_2$ gegeben, so ist ja

$$\left.\begin{aligned}(\infty\, 0\, 1\, x_1) &= x_1,\\ (\infty\, 0\, 1\, x_2) &= x_2,\\ (\infty\, 0\, x_1\, x_2) &= \frac{x_2}{x_1}.\end{aligned}\right\} \tag{5 a, b, c}$$

Aber es wäre ersichtlich nicht die Gleichung (4) erfüllt, wenn wir diese drei Doppelverhältnisse als Maßzahlen für die Größe der Strecken AB, AC und BC wählen würden. *Das Doppelverhältnis* $(UVAB) = D$ *selbst ist also nicht als Maßzahl der Strecke* AB *zu gebrauchen.*

Anders aber liegt die Sache, wenn wir statt D nun $\frac{\mu}{2} \cdot \log D$ als Maßzahl wählen, wo μ eine sogleich noch zu bestimmende Konstante sei und stets am einfachsten der natürliche Logarithmus gemeint sein soll. Dann ist

$$\frac{\mu}{2} \log (UVAA) = \frac{\mu}{2} \log 1 = 0,$$

wenn hier, wie auch sonst fernerhin, von der Periode $2i\pi$ des Logarithmus abgesehen wird, und gemäß den Gleichungen (5a, b, c)

$$\frac{\mu}{2} \log (\infty\, 0\, 1\, x_1) + \frac{\mu}{2} \log (\infty\, 0\, x_1\, x_2) = \frac{\mu}{2} \log (\infty\, 0\, 1\, x_2), \tag{6}$$

d. h. auch die Gleichung (4) ist erfüllt. Natürlich ist auch $\frac{\mu}{2} \log (UVAB)$ invariant bei allen Bewegungen der hyperbolischen Ebene. Auch ist dieser Ausdruck für $\mu > 0$ positiv, wenn in der angenommenen positiven Richtung der Geraden g die Punkte V, A, B, U aufeinander folgen.

1. Wir haben daher in dem Ausdruck

$$AB = \frac{\mu}{2} \log D = \frac{\mu}{2} \log (UVAB) \tag{7}$$

die brauchbare Maßzahl für die Länge einer Strecke AB *gefunden, wobei natürlich von der Periode* $2i\pi$ *des Logarithmus abgesehen wird.*

In der Tat läßt sich auch noch zeigen:

2. Keine andere Funktion $f(D)$ *des Doppelverhältnisses* D *ist für die gewünschten Eigenschaften möglich.*

Es soll ja $f(1) = 0$ sein und das Additionsgesetz $f(x_1) + f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_2)$ gelten. (Die erste Forderung ist übrigens schon in der zweiten enthalten; denn für $x_1 = 1$ folgt ja $f(1) + f(x_2) = f(x_2)$, d. h. $f(1) = 0$.)

Die Funktionalgleichung des Additionsgesetzes ergibt nun ja für $x_1 = x$, $x_2 = x + \Delta x$:

$$f(x) + f\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = f(x + \Delta x) \tag{8}$$

oder, bei Beschränkung auf die ersten Glieder in der Entwicklung der Taylorschen Reihe für $f\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ und $f(x + \Delta x)$, so daß also

$$f\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = f(1) + f'(1)\, \frac{\Delta x}{x},$$

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\, \Delta x \quad \text{ist},$$

$$f(x) + f(1) + \frac{\Delta x}{x} f'(1) = f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

oder, wenn wir für einen Augenblick $f(x) = y$ setzen,

$$y' = f'(x) = f'(1)\,\frac{1}{x}$$

oder, für $f'(1) = \frac{\mu}{2}$, $$y = \frac{\mu}{2} \log x, \tag{9}$$

da die Integrationskonstante wegen $f(1) = 0$ gleich 0 ist. Dies aber wollten wir nachweisen.

Wir wollen ein kurzes Wort hinzufügen, wie die Verhältnisse liegen, wenn statt des Doppelverhältnisses $(UVAB) = \lambda$ das Doppelverhältnis einer anderen Reihenfolge zugrunde gelegt wird, z. B. das Doppelverhältnis $(UAVB) = 1 - \lambda = D_1$. Dann ist natürlich die Entfernung der Punkte A, B durch $\frac{\mu}{2} \log(1 - D_1)$ zu bestimmen, was jedenfalls weniger bequem ist.

Was bedeutet nun die Konstante μ? Bei der Einführung des besonderen Koordinatensystems der S. 51ff. war ja RE_1 die als solche gewählte Einheitsstrecke der x-Achse; die Punkte S_2^∞, R, E_1, S_1^∞ der x-Achse in der Figur 65 S. 52 haben aber die Abszissen

$$-\sqrt{\varkappa},\ 0,\ 1,\ +\sqrt{\varkappa}.$$

Demnach ist $$(S_1^\infty S_2^\infty R E_1) = (\sqrt{\varkappa}, -\sqrt{\varkappa}, 0, 1) = \frac{\sqrt{\varkappa}+1}{\sqrt{\varkappa}-1},$$

und also gilt für die Strecke $\overrightarrow{RE_1} = 1$

$$1 = \frac{\mu}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa}+1}{\sqrt{\varkappa}-1}.$$

3. Es gilt also für die reelle Zahl μ

$$\frac{\mu}{2} = \frac{1}{\log(\sqrt{\varkappa}+1) - \log(\sqrt{\varkappa}-1)}, \tag{10}$$

wo auf der rechten Seite natürlich wieder der reelle Wert der Logarithmen zu wählen ist, oder

$$\mathrm{tgh}\,\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}, \tag{10'}$$

wo $$\mathrm{tgh}\,\frac{1}{\mu} = \frac{-e}{e^{\frac{1}{\mu}} + e^{-\frac{1}{\mu}}}$$ *ist.*

Diese Konstante $\mu > 0$ muß natürlich von der Weltkonstanten $\varkappa$ abhängen, da verschiedene Weltkonstanten ja auch verschiedene unendlich ferne Punkte auf der als x-Achse gewählten Geraden der Fig. 65 S. 52 ergeben. Da $\varkappa$ eine

sehr große positive Zahl ist (bei der Wahl einer Einheitsstrecke, die etwa die Strecke eines Lichtjahres, d. h. die Strecke, welche ein Lichtstrahl in einem Jahre durchläuft, nicht überschreitet), so folgt weiter:

4. Die Zahl μ ist auch eine sehr große positive Zahl, und zwar ist angenähert

$$\mu = \sqrt{\varkappa}. \tag{10''}$$

Nun gilt es aber den Ausdruck $\frac{\mu}{2}\log D$ des Satzes 1 so umzuformen, daß *der neue Ausdruck für die Länge der Strecke AB nur die Koordinaten der Punkte A, B enthält.* Bei der euklidischen Geometrie ist ja auch an die Stelle der projektiven Formel (25) S. 92 die metrische Formel (2) S. 85 getreten.

Unserer hyperbolischen Geometrie liegt ja der absolute Kegelschnitt $x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$ zugrunde in dem S. 51 eingeführten Koordinatensystem, das wir im folgenden beibehalten. Es seien nun die (voneinander verschiedenen) Punkte A, B durch die Koordinaten x_1, y_1, s_1 und x_2, y_2, s_2 gegeben. Die unendlich fernen Punkte U, V ihrer Verbindungslinie g können wir dann in der Form darstellen

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + \lambda_1 x_2, \quad y_1 + \lambda_1 y_2, \quad s_1 + \lambda_1 s_2 \\ \text{bzw.}\quad &x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y_1 + \lambda_2 y_2, \quad s_1 + \lambda_2 s_2. \end{aligned}\right\} \tag{11 a, b}$$

Da diese Koordinaten der Gleichung des absoluten Kegelschnittes genügen müssen, so sind die Größen λ_1, λ_2 aus der Gleichung zu bestimmen

$$(x_1 + \lambda x_2)^2 + (y_1 + \lambda y_2)^2 - \varkappa(s_1 + \lambda s_2)^2 = 0 \tag{12}$$

oder $\lambda^2(x_2^2 + y_2^2 - \varkappa s_2^2) + 2\lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2 - \varkappa s_1 s_2) + (x_1^2 + y_1^2 - \varkappa s_1^2) = 0$

oder mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - \varkappa s_1^2 &= a, \\ x_2^2 + y_2^2 - \varkappa s_2^2 &= b, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 - \varkappa s_1 s_1 &= c \end{aligned}\right\} \tag{13 a, b, c}$$

$$b\lambda^2 + 2c\lambda + a = 0. \tag{12'}$$

Es ist also

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - ab}}{b}, \tag{14 a, b}$$

wo $b \neq 0$ (und auch $a \neq 0$) ist.

Folglich ist
$$D = (UVAB) = (ABUV) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}, \tag{15}$$

wo über das Vorzeichen der Wurzel noch bald besondere Festsetzung getroffen wird.

Jedenfalls bemerken wir sogleich, daß der Ausdruck (15) in seinen reziproken Wert übergeht, wenn das Vorzeichen der Wurzel geändert wird.

Es ergibt sich zunächst als gesuchtes Resultat:

5. Die Länge einer Strecke $\overrightarrow{AB}$ wird durch die Formel dargestellt

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}, \tag{16}$$

wo a, b, c die durch die Gleichungen (13a, b, c) *gegebenen Zahlen sind und die Konstante μ durch die Gleichung* (10) *bestimmt ist.*

Für die Punkte R, E_1 der Fig. 65 S. 52 oder die Punkte (0, 0, 1), (1, 0, 1) ist speziell $a = -\varkappa$, $b = 1 - \varkappa$, $c = -\varkappa$, so daß richtig nach dem Einsetzen dieser Werte in die Formel (16) $AB = RE_1 = 1$ sich ergibt.

Zu der Formel (16) sei nun, was *das Vorzeichen der Wurzel* betrifft, noch folgendes hinzugefügt.

Für zwei *eigentliche, voneinander verschiedene* Punkte A, B kann $c^2 - ab$ nicht gleich 0 sein, da sonst nach den Gleichungen (14a, b) die Zahlen λ_1, λ_2 gleich sein würden, was nicht möglich ist. Es ist vielmehr stets $c^2 - ab > 0$, da ja λ_1, λ_2 reelle Werte sein müssen. (Es wäre jedoch $c^2 - ab = 0$, wenn $A = B$ wäre.)

Es ist ferner ja für zwei *eigentliche* Punkte A, B stets $c \neq 0$. Denn es würde $c = 0$ bedeuten, daß die Punkte A, B konjugierte Pole wären, also, wenn etwa A ein eigentlicher Punkt ist, B ein überunendlich ferner Punkt sein müßte. Wir können auch die homogenen Koordinaten der Punkte A, B, deren Verhältnis ja nur wesentlich ist, so gewählt denken, daß stets $c < 0$ ist. Also gilt dann

$$1 < \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} < +\infty \quad \text{für } \textit{positiven} \text{ Wurzelwert}$$

und

$$0 < \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} < 1 \quad \text{für } \textit{negativen} \text{ Wurzelwert.}$$

6. Da $\mu > 0$ ist, so ergibt sich also für einen positiven bzw. negativen Wurzelwert auch ein positiver bzw. negativer Wert für

$$\frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}.$$

Demgemäß treffen wir folgende Festsetzung:

7. Wird auf der Geraden $g = AB$ eine bestimmte Richtung als die positive ausgewählt und ist die Richtung von A nach B bei der Strecke AB die gleiche oder die entgegengesetzte, soll also demgemäß die Strecke AB positiv oder negativ sein, so ist entsprechend in der Formel (16) *der positive oder negative Wurzelwert zu wählen.*

Aus dem Satze 5 folgt endlich noch der spezielle Satz:

8. Die Strecke der Abszissenachse vom Anfangspunkte R bis zum Punkte S mit der Abszisse x beträgt insbesondere

$$RS = \frac{\mu}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa} + x}{\sqrt{\varkappa} - x}. \tag{17}$$

Was den Grenzübergang von der hyperbolischen Geometrie zur euklidischen Geometrie betrifft, so wollen wir uns mit der Anführung des folgenden Satzes begnügen:

9. Für $\lim \varkappa = \infty$ *und also auch* $\lim \mu = \infty$ *geht die Formel* (17) *im Hinblick auf den Satz 4 über in die Formel der euklidischen Geometrie*

$$RS = x. \tag{17a}$$

§ 21. Ausdehnung der Formel für die Entfernung zweier Punkte auf uneigentliche Punkte in der hyperbolischen Ebene.[1])

Wir können nun natürlich die Formel (16) S. 97 *auf den Fall ausdehnen, daß nicht beide Punkte A, B eigentliche Punkte sind.*

Immer wollen wir uns aber hier vor Augen halten, daß wir ja alle uneigentlichen Punkte auch von einem begrenzten Gebiete aus beherrschen, unsere folgenden Entwicklungen also für ein solches begrenztes Gebiet, das wir ja jetzt auf das ganze Innere des absoluten Kegelschnittes ausgedehnt denken können, ihre gute reelle Bedeutung besitzen.

I. Wir betrachten zunächst die *Strecke auf einer den absoluten Kegelschnitt nicht schneidenden Geraden g*, einer überunendlich fernen Geraden. Es seien hier wieder irgend zwei Punkte A, B auf der Geraden g durch ihre Koordinaten (x_1, y_1, s_1) und (x_2, y_2, s_2) gegeben (Fig. 90). Außerdem sei auf g eine *positive Richtung* angenommen. Es soll sich *um die Strecke AB als den Inbegriff aller Punkte handeln, die bei der positiven Durchlaufung der Geraden g von A bis B angetroffen werden, kurz um die Strecke $\overrightarrow{AB}$.* Auf diese Strecke soll nun auch die Formel (16) übertragen werden. In ihr ist ersichtlich $a > 0$, $b > 0$, also $ab > 0$ und $c^2 - ab < 0$, da ja die Formeln (14a, b) S. 96 konjugiert-komplexe Werte λ_1, λ_2 ergeben müssen. Wir trennen zunächst die Möglichkeiten $c = 0$ und $c \neq 0$.

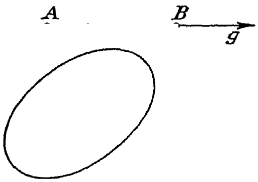


Fig. 90.

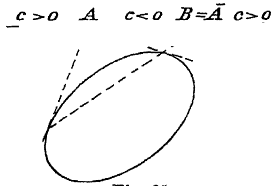


Fig. 91.

1) Beim ersten Studium kann dieser Paragraph fortgelassen werden.

Ist $c = 0$, so sind ja die Punkte A, B konjugierte Pole (Fig. 91). Dann ergibt die Formel (16) S. 97

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \cdot \log(-1) = \frac{\mu}{2}(1 + 2n)\pi i,$$

wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist. Sehen wir von der Periode $2n\pi i$ des Logarithmus ab, so gilt also:

1. Auf einer den absoluten Kegelschnitt nicht schneidenden Geraden g ist die Entfernung zweier konjugierter Pole gleich $\frac{\mu}{2}\pi i$.

Da auch die Strecke $\overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}\pi i$ ist, so folgt weiter:

2. Die Maßzahl λ oder die Länge einer den Kegelschnitt nicht schneidenden Geraden ist gleich $\mu\pi i$.

Es sei nun $c \neq 0$. Es sei dann $\bar{A}$ der konjugierte Pol zu A auf g. Für die Punkte A, B sollen die Koordinaten, deren Verhältnis ja nur wesentlich ist, dann so bezeichnet sein, daß $c < 0$ *ist, wenn B auf* $\overrightarrow{A\bar{A}}$, *dagegen* $c > 0$ *ist, wenn B auf* $\overrightarrow{\bar{A}A}$ *liegt* (Fig. 91). Es ist ferner der Ausdruck

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = \frac{(c - \sqrt{c^2 - ab})^2}{ab} = \frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2} \cdot i}{ab} = \alpha + i\beta,$$

also komplex. Doch ist der absolute Betrag, wie man sich leicht überzeugt, gleich 1, d. h. es ist

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = e^{(\vartheta + 2n\pi)i},$$

wo ϑ eine reelle Zahl ist mit den Ungleichungen $0 < \vartheta < 2\pi$. Es ist dann

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}(\vartheta + 2n\pi)\, i$$

oder, von der Periode $2n\pi i$ abgesehen,

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}\vartheta i.$$

Doch ist im einzelnen hierzu noch folgendes zu bemerken: Je nachdem wir der Wurzel $\sqrt{ab - c^2}$ das positive oder negative Vorzeichen geben, erhalten wir für ϑ einen Wert ϑ_1 oder $\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1$. Diese beiden Werte verteilen sich auf die Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$. Es soll nun aber die Strecke $\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2}\vartheta i$ gegen 0 konvergieren, wenn der auf $A\bar{A}$ gelegene Punkt B, etwa bei unverändertem Punkte A, mit A zusammenfällt; dann muß also auch ϑ gegen 0 konvergieren.

Also entspricht der *positive* Wurzelwert der Strecke $\overrightarrow{AB}$.

Demgemäß haben wir nun folgendes Resultat:

3. Auf einer den absoluten Kegelschnitt nicht schneidenden Geraden g, die mit einer positiven Richtung versehen ist, ist die Entfernung $\overrightarrow{AB}$ *zweier Punkte A, B*

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \vartheta_1 i,$$

also rein imaginär, wo ϑ_1 *die Abweichung der komplexen Zahl*

$$\frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2} \cdot i}{ab}$$

mit positivem Vorzeichen der Wurzel und $0 < \vartheta_1 < 2\pi$ *ist, und zwar ist* $0 < \vartheta_1 < \pi$, *wenn B auf der Strecke* $\overrightarrow{A\bar{A}}$, *dagegen* $\pi < \vartheta_1 < 2\pi$, *wenn B auf der Strecke* $\overrightarrow{\bar{A}A}$ *liegt.*

Entsprechend ist die Entfernung $\overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2} \vartheta_2 i$, *wo* $\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1$, *d. h. die Abweichung der komplexen Zahl* $\frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab -}}{ab}$ *mit negativem Vorzeichen der Wurzel, und* $0 < \vartheta_2 < 2\pi$ *ist.*

Natürlich soll nun die Strecke $\overleftarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$ und die Strecke $\overleftarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}$ sein.

4. Dann aber ist auch das Additionstheorem (vgl. die Gleichung (4) S. 93) *für die Strecken der Geraden g erfüllt.*

II. Wir betrachten nunmehr *die Strecken auf einer Geraden g, die den Kegelschnitt in zwei verschiedenen, reellen Punkten U, V schneidet,* d. h. auf einer eigentlichen Geraden. Hier sind die Verhältnisse aber noch komplizierter, da die gegebenen Punkte A, B entweder beide innerhalb oder beide außerhalb oder einer innerhalb, der andere außerhalb des absoluten Kegelschnittes liegen kann. Die *erste* Möglichkeit ist ja bereits im vorigen Paragraphen erledigt.

α) Wir wenden uns sogleich zu der *zweiten* Möglichkeit, und zwar möge *A innerhalb, B außerhalb des absoluten Kegelschnittes* angenommen werden (Fig. 92). Wieder können wir zunächst die Fälle trennen, daß $c = 0$ oder $c \neq 0$ ist.

Für $c = 0$ sind A, B wieder konjugierte Pole (Fig. 92 für $B = \bar{A}$) und es ergibt die Formel (16) S. 97 sogleich

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \log(-1) = \frac{\mu}{2}(1 + 2n) \cdot \pi i$$

oder, bei Fortlassung der Periode, $\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \pi i.$

5. Auf einer den absoluten Kegelschnitt schneidenden Geraden g ist die Entfernung zweier konjugierter Pole gleich $\frac{\mu}{2}\pi i$ (vgl. den Satz 1 S. 99). Da wieder auch die Strecke $\overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}\pi i$ ist, so folgt weiter:

6. Die Maßzahl λ oder die Länge einer den Kegelschnitt schneidenden Geraden ist wieder gleich $\mu\pi i$.

Es sei nun $c \neq 0$. Die Gerade g sei wieder mit einer *positiven Richtung* versehen. Es sei ferner $\bar{A}$ wieder der konjugierte Pol zu A (Fig. 92). Auch sollen die Bezeichnungen U, V für die unendlich fernen Punkte so gewählt sein, daß die Punkte V, A, U bei der positiven Durchlaufung von g aufeinander folgen. Wir können im folgenden die Lageverhältnisse der Punkte besonders einfach übersehen, wenn wir auf der Geraden g ein ξ-Abszissensystem vorübergehend so konstruiert denken, daß hierbei die Punkte V, A, U die Abszissen $0, 1, \infty$ besitzen. Dann hat der Punkt $\bar{A}$ die Abszisse $\xi = -1$. In der Formel (16) S. 97 ist nun hier $a < 0$, $b > 0$, also $ab < 0$, $c^2 - ab > 0$.

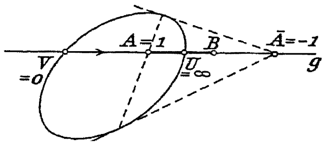


Fig. 92.

Wir wollen dann noch festsetzen: Durch entsprechende Wahl der Koordinaten von A, B sei *die Größe $c < 0$ bzw. > 0, je nachdem für die Abszisse ξ_b von B die Ungleichungen*

$$-\infty < \xi_b < -1$$

oder

$$-1 < \xi_b < 0 \qquad \textit{gelten.}$$

Es ist nun der Ausdruck $\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}$ stets eine von -1 verschiedene negative Zahl (für positiven oder negativen Wurzelwert), also

$$\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = e^{\sigma} \cdot e^{(1 + 2n)\pi i},$$

wo σ eine reelle, von 0 verschiedene Zahl ist. Es ist daher zunächst

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}(\sigma + \pi i + 2n\pi i)$$

oder, bei Fortlassung der Periode,

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}(\sigma + \pi i).$$

Hierzu ist im einzelnen wieder folgendes zu bemerken: Je nachdem wir dem Wurzelwert das positive oder negative Vorzeichen geben, erhalten wir für σ einen Wert σ_1 oder $\sigma_2 = -\sigma_1$. Diese beiden Werte verteilen sich auf die Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$. Wir wollen nun aber, daß σ gegen $+0$ (d. h. von positiven

Werten gegen 0) oder $e^{\sigma} = \left|\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}\right|$ von größeren Werten gegen 1 konvergiert, wenn die Abszisse des Punktes B von den Werten $-\infty < \xi_b < -1$ her gegen -1 konvergiert. Also entspricht der *positive* Wurzelwert der Strecke $\overrightarrow{AB}$.

Demgemäß haben wir nun folgendes Resultat:

7. Auf einer den absoluten Kegelschnitt schneidenden Geraden g, die mit einer positiven Richtung versehen ist, beträgt die Entfernung $\overrightarrow{AB}$ *bzw.* $\overrightarrow{BA}$ *zweier Punkte A, B, von denen A innerhalb, B außerhalb des Kegelschnittes liegt,*

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2}(\sigma_1 + \pi i) \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}(\sigma_2 + \pi i),$$

wo e^{σ_1} *bzw.* $e^{\sigma_2} = e^{-\sigma_1}$ *den absoluten Betrag des Ausdrucks* $\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}$ *mit positivem bzw. negativem Vorzeichen der Wurzel bedeutet.*

Es ist dann wieder $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mu \cdot \pi i,$$
gleich der Länge der gesamten Geraden g.

β) Wir wenden uns jetzt zu der *dritten* Möglichkeit, daß beide Punkte A, B *außerhalb* des absoluten Kegelschnittes liegen (Fig. 93). Wieder sei auf der Geraden g die positive Richtung, wie bisher, festgelegt, und es sei $\bar{A}$ der konjugierte Pol zu A. Die Bezeichnungen U, V für die unendlich fernen Punkte sollen ebenfalls jetzt so gewählt sein, daß die Punkte $V, \bar{A}, U$ bei der positiven Richtung aufeinander folgen. Wir können im folgenden wieder die Lageverhältnisse der Punkte besonders einfach übersehen, wenn wir auf der Geraden g ein ξ-Abszissensystem vorübergehend so konstruiert denken, daß hierbei die Punkte $V, \bar{A}, U$ die Abszissen 0, 1, ∞ besitzen. Dann hat der Punkt A die Abszisse $\xi = -1$. Jetzt ist stets $c \neq 0$, da A, B nicht konjugierte Pole sein können; wir wollen stets $c > 0$ annehmen. Ferner ist $a > 0$, $b > 0$, also $ab > 0$ und $c^2 - ab > 0$, da die Formeln (14a, b) S. 96 zwei reelle, verschiedene Werte λ_1, λ_2 ergeben müssen. Es ist also stets der Ausdruck $\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}$ reell, von 1 verschieden und > 0. Wir setzen nun $\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = e^{\tau}$, wo τ eine reelle, von 0 verschiedene Zahl ist. Es ist daher zunächst

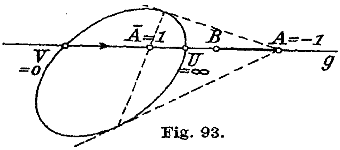


Fig. 93.

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2}(\tau + 2n\pi i).$$

Hierzu ist im einzelnen wieder folgendes zu bemerken: Je nachdem wir dem Wurzelwert das positive oder negative Vorzeichen geben, erhalten wir für τ einen Wert τ_1 oder $\tau_2 = -\tau_1$, und zwar ist

für *positive* Wurzelwerte $\quad -\infty < \tau_1 < 0$

und für *negative* Wurzelwerte $\quad 0 < \tau_2 < +\infty.$

Diese beiden Werte verteilen sich auf die Strecken $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$. Eine von diesen beiden Strecken enthält nicht die eigentlichen Punkte der Geraden g. In den Fig. 94a, b ist diese Strecke, die $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{BA}$ ist, stark ausgezogen. Für die Abszisse ξ_b des Punktes B gilt

im ersten Falle $\quad -1 < \xi_b < 0,$

im zweiten Falle $\quad -\infty < \xi_b < -1.$

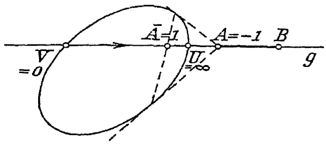


Fig. 94a.

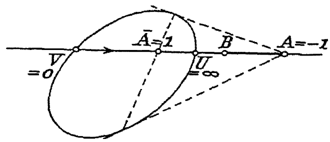


Fig. 94b.

Wir setzen nun fest, daß im *ersten* Falle die Strecke $\overrightarrow{AB}$, im *zweiten* Falle die Strecke $\overrightarrow{BA}$, von der Periode abgesehen, *negativ* sein soll. Dann ist hier stets

$$\overrightarrow{AB} \text{ bzw. } \overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 + ab}} = \frac{\mu}{2} \tau_1 < 0,$$

wo für den Wurzelwert das *positive* Vorzeichen zu wählen ist. Im *ersten* bzw. *zweiten* Falle ist also die Strecke $\overleftarrow{AB}$ bzw. $\overleftarrow{BA}$ *positiv*, also in der Formel

$$\overleftarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = \frac{\mu}{2} \tau_2 > 0$$

das *negative* Vorzeichen für den Wurzelwert zu wählen.

Die Strecke $\overrightarrow{BA}$ im *ersten* Falle bzw. $\overrightarrow{AB}$ im *zweiten* Falle soll aber die Entfernung

$$\overrightarrow{BA} \text{ bzw. } \overrightarrow{AB} = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = \frac{\mu}{2} (\tau_2 + 2\pi i) = \frac{\mu}{2} (-\tau_1 + 2\pi i)$$

besitzen, wo also für den Wurzelwert das *negative* Vorzeichen gelten soll. Dann ist stets wieder

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \mu \pi i.$$

Wir haben daher das Resultat:

8. Auf einer den absoluten Kegelschnitt schneidenden Geraden, die mit einer positiven Richtung versehen ist, beträgt die Entfernung $\overrightarrow{AB}$ *bzw.* $\overrightarrow{BA}$ *zweier*

Punkte A, B, die beide außerhalb des Kegelschnittes gelegen sind und die bei positiver Durchlaufung der Geraden g in der Reihenfolge $\bar{A}$, A, B, wo $\bar{A}$ der Schnittpunkt der absoluten Polaren von A mit g ist, aufeinander folgen,

$$AB = \frac{\mu}{2} \log \frac{-\sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 -}} = \frac{\mu}{}\tau_1 < 0$$

mit positivem Wurzelwert

bzw. $$\overrightarrow{BA} = \frac{\mu}{2} \log \frac{}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = \frac{\mu}{2}(\tau_2 + 2\pi i) = \frac{\mu}{2}(-\tau_1 + 2\pi i)$$

mit negativem Wurzelwert.

Wenn wir nun die Sätze 3, 7 und 8 überblicken, so erkennen wir leicht:

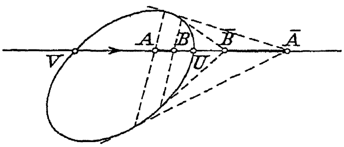


Fig. 95.

9. Bei den getroffenen Festsetzungen ist auch das Additionstheorem (vgl. Gleichung (4) S. 93) *für die Strecken auf einer den absoluten Kegelschnitt schneidenden Geraden g stets erfüllt.*

Sind z. B. auf einer solchen, mit einer positiven Richtung versehenen Geraden g A, $\bar{A}$ und B, $\bar{B}$ zwei Paare konjugierter Pole, wobei die Punkte A, B im Innern des Kegelschnittes gelegen seien (Fig. 95), so ist

$$\overrightarrow{A\bar{A}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\bar{B}} + \overrightarrow{\bar{B}\bar{A}} = \overrightarrow{B\bar{B}} = \frac{\mu}{2}\pi i.$$

Denn es ist ja $$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\bar{B}\bar{A}}.$$

Also ist auch $$\lim_{B=\bar{B}=U}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\bar{B}} + \overrightarrow{\bar{B}\bar{A}}\right) = \frac{\mu}{2}\pi i.$$

Auch ist dann $$\overrightarrow{A\bar{B}} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\bar{B}} = \overrightarrow{A\bar{A}} - \overrightarrow{\bar{B}\bar{A}} = \frac{\mu}{2}\pi i + \overrightarrow{AB}$$

und $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\bar{B}} + \overrightarrow{\bar{B}\bar{A}} + \overrightarrow{\bar{A}A} = \mu\pi i.$$

Wir wollen noch einmal folgendes hervorheben, wobei die Gerade g mit ihrer positiven Richtung wie bisher gegeben sei:

10a. Bewegt sich ein Punkt B auf g von einem im Innern des Kegelschnittes gelegenen Punkt A aus in positiver bzw. negativer Richtung, so ist die Strecke $\overrightarrow{AB}$, von 0 beginnend, positiv bzw. negativ reell.

10b. Bewegt sich aber ein Punkt B auf g von einem im Äußern des Kegelschnittes gelegenen Punkte A aus in positiver bzw. negativer Richtung, so ist die Strecke AB, von 0 beginnend, negativ bzw. positiv reell.

Man kann daher auch als „*innere bzw. äußere metrisch positive*" Richtung von A aus diejenige Richtung einführen, die bzw. mit der bisherigen positiven

Richtung, der „projektiv positiven" Richtung übereinstimmt oder nicht, je nachdem A ein innerer oder äußerer Punkt ist. In der Fig. 96 sind die metrisch positiven Richtungen für den inneren bzw. äußeren Teil der Geraden g eingeführt.

Diese Festlegung der beiden metrisch positiven Richtungen steht ja im engsten Zusammenhang mit der projektiven Tatsache: Wenn von vier harmonischen Punkten $U, V, A, \bar{A}$ bei unveränderlichen Punkten U, V der Punkt A sich dem Punkte U nähert, so nähert auch $\bar{A}$ sich dem Punkte U in der entgegengesetzten Richtung. Die konjugierten Pole der Geraden g bilden ja auch eine hyperbolische Involution mit den Doppelpunkten U, V. (Später werden wir auch von anderer Seite her zu diesen metrisch positiven Richtungen hingeführt, wenn wir die Drehung der Ebene um den absoluten Pol G von g betrachten, vgl. § 28, S. 155.)

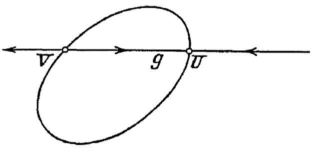


Fig. 96.

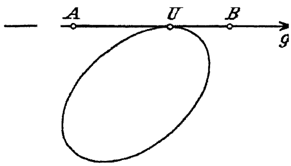


Fig. 97.

III. Endlich haben wir noch den Fall zu betrachten, daß die Gerade g eine *Tangente* des Kegelschnittes, also eine unendlich ferne Gerade ist.

Sind dann A, B zwei nicht mit dem Berührungspunkte U zusammenfallende Punkte (Fig. 97), so ist $c \neq 0$ und $c^2 - ab = 0$, da ja die Formeln (14a, b) S. 96 zwei zusammenfallende Werte λ_1, λ_2 liefern müssen. Dann aber ist stets $\frac{c-\sqrt{c^2-ab}}{c+\sqrt{c^2-ab}} = 1$, d. h.:

11 a. Eine solche Strecke $\overrightarrow{AB}$ ist stets gleich 0 (von der Periode $2n\pi i$ des Logarithmus abgesehen.)

Ist aber $B = U$ und A von U verschieden oder nicht, so ist $c = 0$ und $c^2 - ab = 0$. Dann aber ist $\frac{c-\sqrt{c^2-ab}}{c+\sqrt{c^2-ab}}$ *unbestimmt.*

11 b. Also hat auch eine solche Strecke AB eine unbestimmte Länge.

Die Tangenten des absoluten Kegelschnittes können wir demgemäß die *Minimalgeraden* der hyperbolischen Geometrie nennen (vgl. S. 89).

Zum Schluß sei noch hervorgehoben:

12. Gleiche Strecken, d. h. solche Strecken, die sich durch eine Bewegung ineinander überführen lassen, haben nach unseren Festsetzungen stets dieselbe Maßzahl.

§ 22. Die Größe eines Winkels in der hyperbolischen Geometrie.

Wir werden hier wieder an die Definitionen der verschiedenen Winkelarten im § 7 S. 14ff. anknüpfen. Im Falle der hyperbolischen Geometrie haben wir nun allgemein die drei Fälle zu unterscheiden, daß *der Scheitel des gegebenen Winkels innerhalb, auf oder außerhalb des absoluten Kegelschnittes* liegt. Wir wenden uns zunächst zu der *Betrachtung des ersten Falles;* er entspricht ja auch der uns gewohnten Anschauung, daß der Scheitel des Winkels ein *eigentlicher,* vor unsern Augen liegender Punkt ist. Unsere Betrachtung wird im wesentlichen dual zu den Entwicklungen im § 20 verlaufen; wir können daher auch hier uns kürzer fassen.

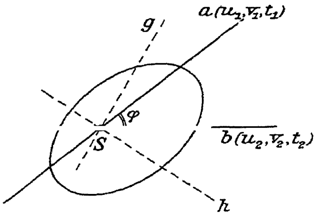


Fig. 98.

Zunächst ergibt sich aus der Gleichung (4) S. 54 unseres absoluten Kegelschnittes nach der im Bd. I S. 160 ausgeführten Methode die folgende Dualform, d. h. die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Linienkoordinaten

$$u^2 + v^2 - \frac{1}{\varkappa} t^2 = 0. \tag{1}$$

Außer den Schenkelgeraden a, b gehen vom Scheitelpunkte S aus nun noch die beiden, allerdings konjugiert-imaginären Tangenten g, h an den absoluten Kegelschnitt (schematische Fig. 98). Entsprechend dem Satze 1 S. 94 stellen wir nun folgende, in allen drei Fällen gemeinsam geltende *Definition* für die Größen der an den Schenkelgeraden a, b gebildeten Winkel auf:

1. Die Maßzahlen dieser Winkelgrößen sind gegeben durch die Formel

$$\varphi = k \log (g\, h\, a\, b), \tag{2}$$

wo k eine noch näher zu bestimmende Konstante bedeutet und $(g\, h\, a\, b)$ das Doppelverhältnis der vier vom Scheitel S ausgehenden Strahlen darstellt.

Bei dieser Definition blicken wir zum Vergleich vor allem auch zu der Formel (22) von Laguerre für die euklidische Geometrie auf S. 90 zurück.

Die Formel (2) wollen wir nun im Falle des eigentlichen Scheitelpunktes näher diskutieren. Die *voneinander verschiedenen* Schenkelgeraden a, b seien durch die homogenen Linienkoordinaten u_1, v_1, t_1 und u_2, v_2, t_2 gegeben. Die Linienkoordinaten der Tangenten g, h können wir dann in der Form darstellen

$$\left.\begin{array}{lll} u_1 + \lambda_1 u_2, & v_1 + \lambda_1 v_2, & t_1 + \lambda_1 t_2 \\ \text{bzw.} \quad u_1 + \lambda_2 u_2, & v_1 + \lambda_2 v_2, & t_1 + \lambda_2 t_2 . \end{array}\right\} \tag{3 a, b}$$

Diese Koordinaten müssen nun der Gleichung (1) genügen, d. h. es sind λ_1, λ_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^2 \left(u_2^2 + v_2^2 + \frac{1}{\varkappa} t_2^2\right) + 2\lambda \left(u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2\right) + \left(u_1^2 + v_1^2 - \frac{1}{\varkappa} t_1^2\right) = 0. \tag{4}$$

Wir setzen nun
$$u_1^2 + v_1^2 - \frac{1}{\varkappa} t_1^2 = \alpha,$$
$$u_2^2 + v_2^2 - \frac{1}{\varkappa} t_2^2 = \beta, \tag{5a, b, c}$$
$$u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2 = \gamma.$$

Dann ergibt sich
$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\alpha}. \tag{6a, b}$$

Folglich ist
$$(g\,h\,a\,b) = (a\,b\,g\,h) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}} = \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta})^2}{\alpha\beta}, \tag{7}$$
wo wir über das Vorzeichen der Wurzel sogleich noch Näheres festsetzen wollen. Es ergibt sich zunächst das Resultat:

2. Die Maßzahlen der von der Geraden a, b gebildeten Winkel sind durch die Formel gegeben
$$\varphi = k \log \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}. \tag{2'}$$

Allgemein sei sogleich folgendes bemerkt: Die Koordinaten (u, v, t) der Geraden, welche den absoluten Kegelschnitt berühren, genügen ja der Gleichung (1). Diese Geraden trennen die beiden Scharen von Geraden, welche den Kegelschnitt schneiden, von denen, die ihn nicht schneiden. Die x-Achse mit den Koordinaten $(u, v, t) = (0, 1, 0)$ gehört zu den den Kegelschnitt schneidenden Geraden. Folglich gilt jetzt der Satz:

3. Die Koordinaten (u, v, t) der den Kegelschnitt schneidenden bzw. nicht schneidenden Geraden sind durch die Ungleichungen $u^2 + v^2 - \frac{1}{\varkappa} t^2 > 0$ bzw. $u^2 + v^2 - \frac{1}{\varkappa} t^2 < 0$ bestimmt.

Es gilt im Falle eines eigentlichen Scheitelpunktes also
$$\left.\begin{aligned} \alpha &> 0, \\ \beta &> 0, \end{aligned}\right\} \quad \text{also auch} \quad \alpha\beta > 0. \tag{8a, b}$$

Ferner sind in unserem ersten Falle die Tangenten g, h konjugiert-imaginäre Geraden. Also sind auch die Zahlen λ_1, λ_2 konjugiert-imaginär, d. h. es ist hier
$$\alpha\beta - \gamma^2 > 0. \tag{9}$$

Es nimmt also der Ausdruck (7) die Form an
$$(g\,h\,a\,b) = \frac{(2\gamma^2 - \alpha\beta) - 2\gamma\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}\, i}{\alpha\beta} = p + i\,q. \tag{7'}$$

Es folgt jetzt weiter $\quad |(g\,h\,a\,b)| = \sqrt{p^2 + q^2} = 1, \quad$ d. h.

Der absolute Betrag des Doppelverhältnisses ist gleich 1 oder:

Der Logarithmus des Doppelverhältnisses ist (auch einschließlich seiner Periode $2n\pi i$) rein imaginär.

Hieraus schließen wir sogleich weiter:

4. Da doch die Winkel mit eigentlichem Scheitel S reell sein sollen, so muß die Konstante k der Formel (2′) *notwendig rein imaginär sein.*

Nun soll weiter *jeder gestreckte Winkel gleich* π sein. In diesem speziellen Falle können wir zwar den Ansatz (3a, b) nicht machen. Doch ergibt sich direkt, daß für zusammenfallende Geraden a, b das Doppelverhältnis

$$(g\,h\,a\,b) = (g\,h\,a\,a) = 1,$$

also

$$\log(g\,h\,a\,b) = 0 + 2n\,\pi i$$

und

$$\varphi = k\,(0 + 2n\,\pi\,i)$$

ist, wo n hier, wie später, stets eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist. Es folgt also:

5. Die Konstante k ist gleich $\frac{i}{2}$ zu wählen.

Demnach lautet der Satz 2 jetzt bestimmter:

6. Die Maßzahlen der Winkelgrößen sind durch die Formel gegeben

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{i}{2}\log(g\,h\,a\,b)\\ &= \frac{i}{2}\log(p + i\,q),\end{aligned} \tag{2''}$$

wo

$$\begin{aligned}p &= \frac{2\gamma^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta}\\ q &= \end{aligned} \tag{10 a, b}$$

und

$$p^2 + q^2 = 1 \quad \textit{ist.} \tag{11}$$

Die Formel (2″) können wir auch wie folgt schreiben:

$$\varphi = i \cdot \log \sqrt{(g\,h\,a\,b)}. \tag{2'''}$$

Nun ist aber nach der Gleichung (7)

$$\sqrt{(g\,h\,a\,b)} = \frac{\gamma - \sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}\cdot i}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Also folgt aus der Gleichung (2‴)

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\,\sin\varphi = \sqrt{(g\,h\,a\,b)}$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} \tag{12a, b}$$

wobei richtig $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist, d. h.:

7. *Die Kosinus- und Sinusfunktionen der Winkel, unter denen zwei Geraden sich im Innern des absoluten Kegelschnittes schneiden, sind durch die Formeln* (12a, b) *gegeben.*

Ferner ist $u_1 u + v_1 v - \frac{1}{\varkappa} t_1 t = 0$ ja die Gleichung des Poles für die Polare (u_1, v_1, t_1) in den Linienkoordinaten (u, v, t), und wenn diese Gleichung für die Werte $(u, v, t) = (u_2, v_2, t_2)$ erfüllt ist, so besagt dies: Die Gerade (u_2, v_2, t_2) geht durch den Pol der Geraden (u_1, v_1, t_1), d. h.:

Die Gleichung
$$\gamma = u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2 = 0 \tag{13}$$
bedeutet ganz allgemein, daß die Geraden a, b konjugierte Polaren sind.

Wir können dann aus der Gleichung (12b) sogleich folgern (vgl. den § 5):

8. *Stets dann und nur dann stehen zwei (eigentliche oder auch nicht eigentliche) Geraden aufeinander senkrecht, wenn sie konjugierte Polaren bezüglich des absoluten Kegelschnittes sind.*

Jetzt aber wollen wir noch (analog wie auf S. 97 bei einer Strecke) auf die Wahl der Vorzeichen des Ausdruckes $\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}$ in den Formeln (2″) und (10b) des Satzes 6 näher eingehen, die ja im engsten Zusammenhang mit der Festlegung des *einzelnen* Winkels der Geraden a, b steht. Wir wollen zunächst allgemein die Bedeutung der Gleichung untersuchen

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0 \tag{14}$$

oder

$$\left(u_1^2 + v_1^2 - \frac{1}{\varkappa} t_1^2\right)\left(u_2^2 + v_2^2 - \frac{1}{\varkappa} t_2^2\right) - \left(u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2\right)^2 = 0. \tag{14'}$$

In diesem Falle ist also nach der Gleichung (12b) $\sin\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 0 + n\pi$. Doch brauchen jetzt nicht notwendig die Geraden a, b identisch zu sein. Wir wollen vielmehr die Frage aufwerfen:

Welches ist der geometrische Ort, d. h. die Gesamtheit aller Geraden $(u, v, t) = (u_2, v_2, t_2)$, die mit einer gegebenen Geraden (u_1, v_1, t_1) die Gleichung (14′) *befriedigen, also mit der Geraden (u_1, v_1, t_1) die Gleichung $\sin\varphi = 0$ ergeben?*

Wir ersetzen in der Gleichung (14′) die Größen (u_2, v_2, t_2) durch (u, v, t). Es läßt sich nun zeigen, daß die Gleichung (14′) sich in die Form überführen läßt

$$[u(u_1 - v_1\sigma) + v(v_1 + u_1\sigma) - (u_1^2 + v_1^2)t] \cdot [u(u_1 + v_1\sigma) + v(v_1 - u_1\sigma) - (u_1^2 + v_1^2)t] = 0 \tag{14''}$$

oder in die beiden linearen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u(u_1 - v_1\sigma) + v(v_1 + u_1\sigma) - (u_1^2 + v_1^2)\,t = 0, \\ u(u_1 + v_1\sigma) + v(v_1 - u_1\sigma) - (u_1^2 + v_1^2)\,t = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (15\,\text{a, b})$$

wo

$$\sigma = \sqrt{\varkappa\,(u_1^2 + v_1^2) - t_1^2} \quad \text{ist.} \qquad (16)$$

Die Gleichungen (15a, b) stellen aber *zwei Strahlenbüschel* vor, deren Träger die Punkte

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 - v_1\sigma & \qquad & x_2 = u_1 + v_1\sigma \\ y_1 &= v_1 + u_1\sigma & \text{und} \qquad & y_2 = v_1 - u_1\sigma \\ s_1 &= -(u_1^2 + v_1^2) & & s_2 = -(u_1^2 + v_1^2) \end{aligned}$$

sind. Diese Punkte sind aber die Schnittpunkte der Geraden (u_1, v_1, t_1) mit der Gleichung $u_1 x + v_1 y + t_1 s = 0$ und des absoluten Kegelschnittes $x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$.

Somit haben wir das Resultat gewonnen:

9. Stets dann und nur dann ist für zwei Geraden (u_1, v_1, t_1) *und* (u_2, v_2, t_2) *die Gleichung* $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$ *erfüllt, wenn die beiden Geraden, die auch zusammenfallen können, sich auf dem absoluten Kegelschnitte schneiden.* —

Es möge jetzt *der Scheitelpunkt S im Innern des absoluten Kegelschnittes* liegen. Es gelten also die Ungleichungen (8a, b) und, wenn die Schenkelgeraden a, b nicht zusammenfallen, die Ungleichung (9), während bei zusammenfallenden Schenkelgeraden a, b dann

$$\alpha = \beta = \pm\gamma$$

und also

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0 \quad \text{gilt.}$$

Wir können jetzt noch die Ungleichung

$$\gamma \geqq 0 \qquad (17)$$

hinzufügen. Diese Ungleichung läßt sich stets durch zweckmäßige Wahl für die Vorzeichen der Koordinaten u_1, v_1, t_1 und u_2, v_2, t_2 erreichen, da wir ja z. B. die Vorzeichen der Zahlen u_2, v_2, t_2 auch umkehren können.

Der spezielle Fall $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$, d. h. der Fall zweier zusammenfallenden Schenkelgeraden, ergibt ja (da dann notwendig $\gamma \neq 0$ ist) nach den Gleichungen (10a, b)

$$p = 1,\ q = 0,\ \text{d. h.}\ \varphi = 0 + n\pi,$$

in Übereinstimmung mit den Formeln (12a, b).

Es sei aber nun $\alpha\beta - \gamma^2 > 0$. Dann ergibt sich zunächst für $\gamma = 0$ (vgl. den Satz 8) nach den Gleichungen (10a, b) $p = -1 = e^{-i\pi}$, $q = 0$ und also nach der Gleichung (2″)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi. \qquad (18)$$

Nun sei schließlich $\gamma > 0$. Dann können wir gemäß der Formel (7′) S. 107 setzen

$$(g\,h\,a\,b) = \frac{(2\gamma^2 - \alpha\beta) - 2\gamma\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}\cdot i}{\alpha\beta} = e^{-i\psi},$$

wo

$$0 \leqq \psi \leqq 2\pi$$

ist. Dann ist also

$$\varphi = \frac{\psi}{2} + n\pi. \tag{2''''}$$

Bei *positivem* Wurzelwert $\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}$ ist dann $0 < \psi < \pi$, bei *negativem* Wurzelwert $\pi < \psi < 2\pi$, d. h.:

10. Je nachdem (für $\gamma > 0$) die Wurzel $\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}$ in der Formel (2″) *positives oder negatives Vorzeichen erhält, stellt diese Formel, von dem Periodenglied $n\pi$ abgesehen, den spitzen oder stumpfen (positiven) Winkel der Geraden a, b dar.* —

Wir wollen kurz auch noch die Fälle der Winkelbestimmung besprechen, bei denen der Scheitelpunkt S auf dem absoluten Kegelschnitt liegt oder außerhalb desselben.

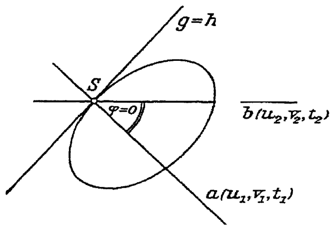


Fig. 99.

Im Falle, daß der *Scheitelpunkt S ein unendlich ferner* Punkt ist, die *Schenkelgeraden a, b aber eigentliche Geraden* sind (Fig. 99), ergibt sich nun, da die Geraden g, h zusammenfallen,

$$(g\,h\,a\,b) = (a\,b\,g\,g) = 1.$$

Es ist ja auch $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$, gemäß dem Satze 9. Also ist nach der Formel (2″)

$$\varphi = 0 + n\pi$$

(vgl. auch die Formeln (12a, b), d. h.:

11. Zwei sich auf dem absoluten Kegelschnitt schneidende eigentliche Geraden a, b bilden den Winkel 0 miteinander, von der Periode $n\pi$ abgesehen.

12. Es gibt also in der hyperbolischen Geometrie auch Dreiecke mit eigentlichen Seitengeraden, deren drei Winkel gleich 0 sind (Fig. 100). *Die Ecken S_1, S_2, S_3 liegen dann allerdings im Unendlichen, d. h. jede Seite ist zu den beiden anderen parallel.*

Ein solches Dreieck wollen wir ein *dreifach asymptotisches* Dreieck nennen.

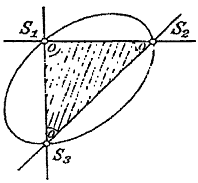


Fig. 100.

In dem besonderen Falle ferner, daß die Gerade b mit der Tangente des unendlich fernen Schnittpunktes S zusammenfällt, aber a, wie bisher, eine eigentliche Gerade ist, ist außer $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$ auch $\beta = \gamma = 0$. *Dann aber ist der Winkel φ der Geraden a, b unbestimmt.*

Im Falle, daß der *Scheitelpunkt* S schließlich *ein überunendlich ferner Punkt* ist, die *Schenkelgeraden* a, b *aber eigentliche Geraden* sind (Fig. 101), ist ersichtlich das Doppelverhältnis $(g\,h\,a\,b)$ reell. In den Formeln (6a, b) müssen ja λ_1, λ_2 zwei reelle Werte sein; d. h. es ist hier

$$\gamma^2 - \alpha\beta > 0, \tag{19}$$

und da ja nach dem Satze 3 S. 107 $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ ist, so ist nach der Formel (7) S. 107 das Doppelverhältnis insbesondere auch stets positiv. Dann aber ergibt weiter die Formel (2″) S. 108 für den Winkel φ, abgesehen von der Periode $2n\pi$, einen rein imaginären Wert.

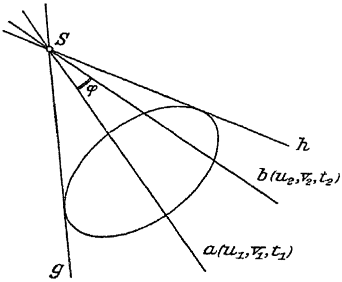


Fig. 101.

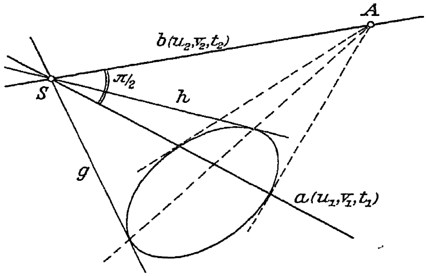


Fig. 102.

13. Zwei eigentliche Geraden a, b mit einem überunendlich fernen Schnittpunkt S bilden also einen rein imaginären Winkel miteinander.

Wir wollen nur noch einen Blick auf den besonderen Fall werfen, daß wieder der *Schnittpunkt* S der Geraden a, b *ein überunendlich ferner Punkt* und die *Gerade a eine eigentliche, die Gerade b aber eine uneigentliche* Gerade und zwar *zu a konjugiert polar* ist (Fig. 102). Dann ist ja $\gamma = 0$ und nach dem Satze 3 S. 107 ist $\alpha > 0$, $\beta < 0$. Nach der Formel (7) S. 107 ist also

$$(g\,h\,a\,b) = -1$$

und demnach nach der Formel (2″) S. 108

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

von der Periode $n\pi$ abgesehen. Hieraus folgt:

14. Auch der volle Winkel mit einem überunendlich fernen Scheitelpunkt beträgt 2π.

§ 23. Die Länge einer Strecke und die Größe eines Winkels in der elliptischen Geometrie; die Weltmaßstrecke.

In der *elliptischen* Geometrie liegen die Verhältnisse natürlich analog wie in der hyperbolischen Geometrie; doch sind sie insofern einfacher, als alle Geraden und alle Punkte *eigentliche* Elemente sind.

I. Wir wenden uns zunächst zur *Bestimmung der Länge einer Strecke*. An der Spitze unserer Untersuchung steht die Gleichung des absoluten (nullteiligen) Kegelschnittes

$$x^2 + y^2 + \varkappa s^2 = 0. \tag{1}$$

Die Strecke AB sei wieder durch die Koordinaten ihrer Endpunkte (x_1, y_1, s_1) und (x_2, y_2, s_2) festgelegt.

1. Die Länge der Strecke ist jetzt, analog dem Satze 1 S. 94, durch die Formel festgelegt

$$AB = k_1 \log (U\,V\,A\,B), \tag{2}$$

wo k_1 eine noch näher zu bestimmende Konstante ist und $(U\,V\,A\,B)$ das Doppelverhältnis der Punkte A, B mit den Schnittpunkten U, V ihrer Verbindungslinie und des absoluten Kegelschnittes bedeutet.

Die weitere Rechnung ist derjenigen in der hyperbolischen Geometrie ganz analog; es tritt gleichsam nur $-\varkappa$ an die Stelle von $+\varkappa$.

Wir setzen wieder zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + \varkappa s_1^2 &= a, \\ x_2^2 + y_2^2 + \varkappa s_2^2 &= b, \\ x_1 x_2 + y_1 y_2 + \varkappa s_1 s_2 &= c. \end{aligned}\right\} \tag{3 a, b, c}$$

Die Koordinaten von U, V seien auch hier in der Form der Ausdrücke (11a, b) S. 96 dargestellt. Dann ergibt sich ganz analog wie auf S. 96

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - ab}}{b} \tag{4}$$

und folglich

$$D = (U\,V\,A\,B) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}, \tag{5}$$

wo über das Vorzeichen der Wurzel noch eine besondere Festsetzung getroffen werden soll. Hier sind natürlich die Zahlen λ_1, λ_2 stets konjugiert-imaginär, d. h. es ist stets

$$c^2 - ab \leqq 0. \tag{6}$$

Durch direkte Rechnung ergibt sich ja auch

$$\left.\begin{aligned} ab - c^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + \varkappa s_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + \varkappa s_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + \varkappa s_1 s_2)^2 \\ &= (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 + \varkappa (y_1 s_2 - s_1 y_2)^2 + \varkappa^2 (s_1 x_2 - x_1 s_2)^2 \geqq 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Das Gleichheitszeichen in der Formel (6) gilt nur dann, wenn die Punkte A, B zusammenfallen. Es ist also auch

$$D = \frac{c - \sqrt{ab - c^2}\cdot i}{c + \sqrt{ab - c^2}\cdot i} = \frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2}\cdot i}{ab}. \tag{5'}$$

Nun ist ja die Strecke RE_1 unseres Koordinatensystems die Einheitsstrecke (vgl. die Fig. 52 auf S. 38). Die Punkte R, E_1, die jetzt an die Stelle von A, B

treten, haben die (unhomogenen) Abszissen 0 und 1 und die zugehörigen Punkte U, V, die Schnittpunkte der x-Achse mit dem absoluten Kegelschnitt, haben die Abszissen $\pm \sqrt{\varkappa} \cdot i$. Also gilt hier die Gleichung

$$(U V R E_1) = (\sqrt{\varkappa}\cdot i, -\sqrt{\varkappa}\cdot i, 0, 1) = \frac{\sqrt{\varkappa}-i}{\sqrt{\varkappa}+i} = \frac{(\varkappa-1)-2\sqrt{\varkappa}\cdot i}{\varkappa+1}$$

und nach der Gleichung (2) ist also

$$1 = k_1 \log \frac{\sqrt{\varkappa}-i}{\sqrt{\varkappa}+i}$$

Nun ist aber $$|(U\ V\ R\ E_1)| = 1,$$

d. h. es ist $$(U V R E_1) = \frac{(\varkappa-1)-2\sqrt{\varkappa}\cdot i}{\varkappa+1} = e^{-i(\vartheta_0+2n\pi)}, \tag{8}$$

wo die Größe ϑ_0 reell mit der Ungleichung $0 < \vartheta_0 < 2\pi$ ist. Die Größe ϑ_0 würde indes noch von dem Vorzeichen, das wir $\sqrt{\varkappa}$ geben, abhängen. Darüber werden wir sogleich noch die Entscheidung treffen.

Jedenfalls ist der Ausdruck

$$\log \frac{\sqrt{\varkappa}-i}{\sqrt{\varkappa}+i} = \quad i(\vartheta_0 + 2n\pi)$$

rein imaginär. Wir setzen daher $2k_1 = \mu i$. Es ist also

$$RE_1 = 1 = \frac{\mu}{2}(\vartheta_0 + 2n\pi).$$

Das Periodenglied $\mu n \pi$ (für positive oder negative ganze Zahlen n) bringt zum Ausdruck, da die ganze Länge l jeder Geraden, hier der x-Achse, oder besser die Maßzahl λ dieser Länge ja endlich ist: Wir können natürlich die x-Achse von R aus in der einen oder anderen Richtung erst n-mal durchlaufen, wobei wir nach R zurückgelangen, und dann noch die kleiner als $\mu\pi$ betragende positive Strecke von R nach E_1.

Der kleinste positive Wert der rechten Seite ergibt sich für $n = 0$. Es gilt daher für die Strecke RE_1 selbst

$$1 \quad \frac{\mu}{2}\vartheta_0.$$

2. Es gilt also für die reelle Zahl $\mu = \frac{2k_1}{i}$

$$\mu = \frac{2}{\vartheta_0} = \frac{2i}{\log(\sqrt{\varkappa}+i) - \log(\sqrt{\varkappa}-i)} \tag{9}$$

oder $$\operatorname{tg}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \tag{9'}$$

und angenähert für sehr große Werte $\varkappa$

$$\mu = \sqrt{\varkappa}, \tag{9''}$$

(vgl. die Formeln (10), (10′) und (10″) S. 95 und 96).

Auch ergibt sich sogleich der Satz:

3. Die Maßzahl λ der Länge l einer jeden Geraden beträgt $\mu\pi$ oder angenähert $\sqrt{\varkappa}\cdot\pi$.

Nun können wir aber sofort die Entscheidung treffen, welches Vorzeichen wir der Wurzel $\sqrt{\varkappa}$ in den vorstehenden Formeln zu geben haben. Es gilt ja für die Strecke RE_1 nunmehr nach der Festsetzung auf S. 38

$$1 = \frac{\mu}{2}\vartheta_0 < \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu}{2}\pi$$

oder
$$\vartheta_0 < \pi. \tag{10}$$

Nun aber folgt aus der Gleichung (8), daß nur für einen *positiven* Wurzelwert $\sqrt{\varkappa}$ die letzte Ungleichung erfüllt ist. Also haben wir demgemäß festzusetzen: *Der Wurzelwert $\sqrt{\varkappa}$ in den Formeln* (8) *und* (9) *ist mit positivem Vorzeichen zu wählen.*

Sogleich können wir nun noch folgenden wichtigen Satz aussprechen:

4. Die Weltkonstante $(-\varkappa)$, die Zahl μ und die Maßzahl λ der Länge der Geraden in der elliptischen Geometrie sind durch die Gleichungen miteinander verknüpft

$$\lambda = \mu\pi = \frac{2\pi i}{\log(\sqrt{\varkappa}+i) - \log(\sqrt{\varkappa}-i)} \tag{11}$$

oder angenähert
$$\lambda = \sqrt{\varkappa}\cdot\pi \tag{11'}$$

(wobei wir nochmals hervorheben, daß dieser Gleichung eine bestimmte Einheitsstrecke, etwa die Strecke eines Lichtjahres zugrunde liegt). (Einen analogen Satz hätten wir auch für die hyperbolische Geometrie aussprechen können, vgl. die Sätze 2 S. 99 und 6 S. 101).

Somit gilt also jetzt:

5. Die Länge der Strecke AB wird durch die Formel bestimmt

$$AB = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2}\cdot i}{ab}. \tag{2'}$$

Es ist nun allgemein
$$\left|\frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2}\cdot i}{ab}\right| = 1.$$

Also können wir für ein bestimmtes Vorzeichen der Wurzel setzen

$$\frac{(2c^2 - ab) - 2c\sqrt{ab - c^2}\cdot i}{ab} = e^{-i(\vartheta + 2n\pi)}, \tag{12}$$

wo $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ sei. Dann ergibt die Formel (2') zunächst

$$AB = i\,\frac{\mu}{2}(-i\vartheta - 2n\pi i)$$

oder
$$AB = \frac{\mu}{2}\vartheta = \frac{\vartheta}{\ } \tag{2''}$$

von dem Periodenglied abgesehen.

Fallen die Punkte A, B zusammen, so ist nach der Formel (7) $ab - c^2 = 0$. Dann ist $\vartheta = 0$ bzw. 2π und also

$$A B = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mu \pi \tag{13}$$

entsprechend dem Satze 3.

Was aber das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{ab - c^2}$ (für $ab - c^2 > 0$) betrifft, so gilt zunächst, wenn ϑ_1 und ϑ_2 die Werte ϑ der Formel (12) für positiven bzw. negativen Wurzelwert sind,

$$\vartheta_2 = 2\pi - \vartheta_1 . \tag{14}$$

6. Es sind demnach nach der Formel (2″) $\frac{\mu}{2}\vartheta_1$ *und* $\frac{\mu}{2}\vartheta_2$ *die beiden (positiv gerechneten) Strecken der Geraden, in welche sie durch die Punkte* A, B *zerfällt.*

Sind insbesondere die Punkte A, B konjugierte Pole, so ist nach der Gleichung (3c) $c = 0$, also $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pi$. Die beiden Strecken der Geraden AB sind in diesem Falle einander gleich; jede ist die Hälfte $\frac{\mu}{2}\pi$ der Länge der ganzen Geraden.

Sind die Punkte A, B aber nicht konjugierte Pole und ist $\bar{A}$ der konjugierte Pol zu A auf der Geraden AB, so ist ersichtlich die eine der beiden Strecken AB größer, die andere um ebensoviel kleiner als $A\bar{A} = \frac{\mu}{2}\pi$. Wir können nun stets durch zweckmäßige Wahl der Vorzeichen für die Koordinaten der Punkte A, B erreichen, daß im allgemeinen Falle $c > 0$ ist. Dann gilt der Satz:

7. Je nachdem (für $c > 0$*) die Wurzel* $\sqrt{ab - c^2}$ *in der Formel* (12) *positives oder negatives Vorzeichen erhält, gilt* $0 < \vartheta_1 < \pi$ *bzw.* $\pi < \vartheta_2 < 2\pi$, *und die Formel* (2″) *stellt dann für* $\vartheta = \vartheta_1$ *bzw.* $= \vartheta_2$ *die kleinere bzw. die größere Strecke* AB *dar.*

Aus dem Satze 5 folgt endlich noch der spezielle Satz:

8. Die Strecke der Abszissenachse vom Anfangspunkte R *bis zum Punkte* S *mit der Abszisse* x *beträgt insbesondere*

$$RS = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{\sqrt{\varkappa} - x\,i}{\sqrt{\varkappa} + x\,i} = \frac{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{\varkappa}}}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{\sqrt{\varkappa}}} . \tag{15}$$

II. In den Sätzen 9 S. 40 und 4 S. 53 haben wir die Weltkonstante $\mp \varkappa$ für die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie festgelegt und erkannt, daß diese Zahl natürlich von der Wahl der Einheitsstrecke $RE_1 = d$ (deren Maßzahl also $\delta = 1$ ist) abhängt. Mit dieser Einheitsstrecke gemessen hat die ganze projektive Gerade nach den Sätzen 2 S. 99, 6 S. 101 und 3 S. 115 die Maßzahl

$$\lambda = \mu \pi i, \text{ wo ja } \operatorname{tgh} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \text{ ist (hyperbolische Geometrie)}$$

bzw. $$\lambda = \mu \pi, \text{ wo } \operatorname{tg} \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \quad \text{ ist (elliptische Geometrie).}$$

Wir wollen nun in analoger Weise für *beide* Geometrien eine (eigentliche) Weltmaßstrecke m mit der Maßzahl μ einführen durch die *Definition:*

9. Die Weltmaßstrecke (Weltradius) soll sich zur ganzen projektiven Geraden verhalten wie $1 : \pi i$ *(hyperbolische Geometrie) bzw.* $1 : \pi$ *(elliptische Geometrie).*

10. Mit der Einheitsstrecke gemessen hat dann die Weltmaßstrecke m *die Maßzahl* μ (vgl. den Satz 4).

Wir haben hiermit also auch die *geometrische* Deutung der Zahl μ gewonnen.

11. Die Weltmaßstrecke m *selbst ist unabhängig von der Wahl des projektiven Koordinatensystems wie der gewählten metrischen Einheitsstrecke.*

Denken wir die Weltmaßstrecke m vom Koordinatenanfangspunkt R auf der x-Achse in positiver Richtung bis zum Punkte M abgetragen, so gilt:

12a. In der hyperbolischen Geometrie ist nach dem Satze 8 S. 98 die Abszisse x_m *des Punktes* M *in dem gewählten projektiven Koordinatensystem gegeben durch die Gleichung*

$$\mu = \frac{\mu}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa} + x_m}{\sqrt{\varkappa} - x_m} \tag{16}$$

oder

$$x_m = \sqrt{\varkappa}\, \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \sqrt{\varkappa} \operatorname{tgh} 1 = 0{,}9588 \ldots \sqrt{\varkappa}. \tag{16'}$$

Es ist also auch das Doppelverhältnis $(S_1^\infty S_2^\infty R M) = e^2$, wo S_1^∞, S_2^∞ die unendlich fernen Punkte auf der x-Achse bedeuten.

12b. In der elliptischen Geometrie ist nach dem Satze 8 S. 116 die Abszisse x_m *gegeben durch die Gleichung*

$$\mu = i \frac{\mu}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa} - x_m i}{\sqrt{\varkappa} + x_m i} \tag{17}$$

oder

$$x_m = \frac{\sqrt{\varkappa}}{i} \cdot \frac{e^i - e^{-i}}{e^i + e^{-i}} = \sqrt{\varkappa} \cdot \operatorname{tg} 1 = 1{,}557 \ldots \sqrt{\varkappa}. \tag{17'}$$

Es sei schließlich noch folgendes hinzugefügt: Wir können jetzt auch den Punkt E_1 der Fig. 52 S. 38 und der Fig. 65 S. 52 als den Punkt M gewählt denken, also die Weltmaßstrecke $RM = RE_1$ als metrische Einheitsstrecke. Dann ist nach den Formeln (16′) und (17′) natürlich der neue Wert der Weltkonstante

$$+\bar{\varkappa} = \frac{1}{\operatorname{tgh}^2 1} \quad \text{(hyperbolische Geometrie),}$$

$$-\bar{\varkappa} = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2 1} \quad \text{(elliptische Geometrie, vgl. den Satz 14, S. 43).}$$

Die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in diesem projektiven Koordinatensystem lautet dann also

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{\mathrm{tgh}^2 1} s^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x^2 + y^2 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2 1} s^2 = 0.$$

Die Maßzahl λ der ganzen projektiven Geraden wird aber jetzt einfach πi bzw. π.

Als „*Krümmung*" des hyperbolischen bzw. elliptischen Raumes pflegt man auch die Ausdrücke

$$-\left(\frac{d}{m}\right)^2 = -\frac{1}{\mu^2} \quad \text{bzw.} \quad +\left(\frac{d}{m}\right)^2 = +\frac{1}{\mu^2}$$

zu bezeichnen, wo d, m die Einheitsstrecke und die Weltmaßstrecke bedeuten, oder angenähert $-\frac{1}{\varkappa}$ bzw. $+\frac{1}{\varkappa}$ (vgl. Satz 4 S. 96 und Satz 2 S. 114).

III. Nun wenden wir uns zur *Bestimmung der Größe eines Winkels*. Wir haben dann die Gleichung des absoluten Kegelschnittes in Linienkoordinaten zugrunde zu legen:

$$u^2 + v^2 + \frac{1}{\varkappa} t^2 = 0. \tag{18}$$

Die Schenkelgeraden a, b des Winkels seien durch die Koordinaten (u_1, v_1, t_1) und (u_2, v_2, t_2) gegeben.

13. Die Maßzahlen der von diesen Geraden gebildeten Winkel sind jetzt, analog dem Satze 1 S. 106, durch die Formel gegeben

$$\varphi = k_0 \log(g\,h\,a\,b)\,, \tag{19}$$

wo k_0 eine noch näher zu bestimmende Konstante ist und $(g\,h\,a\,b)$ das Doppelverhältnis der Geraden a, b mit den Tangenten g, h ihres Schnittpunktes S an den absoluten Kegelschnitt bedeutet.

Die Tangenten g, h sind auch hier konjugiert-imaginär. Die weitere Rechnung ist derjenigen in der hyperbolischen Geometrie wieder ganz analog. Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} u_1{}^2 + v_1{}^2 + \frac{1}{\varkappa} t_1{}^2 &= \alpha, \\ u_2{}^2 + \qquad + \frac{1}{\varkappa} t_2{}^2 &= \beta, \\ u_1 u_2 + v_1 v_2 + \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2 &= \gamma. \end{aligned} \tag{20 a, b, c}$$

Die Koordinaten von g, h sind dann in der Form der Ausdrücke (3a, b) S. 106 dargestellt. Dann ergibt sich, ganz analog wie auf S. 107,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\beta} \tag{21}$$

und folglich $$(g\,h\,a\,b) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta}} = \frac{(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \alpha\beta})^2}{\alpha\beta}, \tag{22}$$

wo wir von dem Vorzeichen der Wurzel sogleich noch näher sprechen werden. Da die Zahlen λ_1, λ_2 natürlich konjugiert-imaginär sind, so gilt stets

$$\gamma^2 - \alpha\beta \leqq 0. \tag{23}$$

Es ist also auch

$$(g h a b) = \frac{\gamma - i\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\gamma + i\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}} = \frac{(\gamma - i\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2})^2}{\alpha\beta}. \tag{22'}$$

Ferner ist auch

$$\alpha > 0,\ \beta > 0, \quad \text{also} \quad \alpha\beta > 0. \tag{24}$$

Nun gilt weiter

$$|(g\,h\,a\,b)| = 1, \tag{25}$$

d. h. die Konstante k_0 der Formel (19) muß rein imaginär sein, damit die Maßzahlen φ reell werden. Und da jeder gestreckte Winkel, für den also $a = b$ ist, gleich π sein soll, so gilt schließlich (vgl. Satz 5 S. 108):

14. Die Konstante k_0 ist hier gleich $\frac{i}{2}$ zu wählen.

Und der Satz 13 lautet jetzt genauer:

15. Die reellen Maßzahlen der Winkelgrößen sind durch die Formeln gegeben

$$\begin{aligned} \varphi &= i \log \sqrt{(g h a b)} \\ &= i \log (p + i q), \end{aligned} \tag{19'}$$

wo

$$p = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}}, \qquad q = -\frac{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} \tag{26 a, b}$$

und

$$p^2 + q^2 = 1 \qquad \textit{ist.} \tag{27}$$

Es gelten dann die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{}{\sqrt{\alpha\beta}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{28 a, b}$$

Gemäß der Gleichung (23) können wir nun setzen

$$\frac{\gamma - i\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\gamma + i\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}} = \frac{(2\gamma^2 - \alpha\beta) - 2\gamma\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}\cdot i}{\alpha\beta} = e^{-i\psi}, \tag{29}$$

wo $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ ist.

Es ist dann also

$$\varphi = \frac{\psi}{2} + n\pi. \tag{19''}$$

Ist nun $\gamma = 0$, d. h. sind die Geraden a, b konjugierte Polaren, so ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, von der Periode abgesehen. Ist aber $\gamma \neq 0$, so sei durch zweckmäßige Wahl der Vorzeichen für die Koordinaten der Geraden a, b die Größe $\gamma > 0$ gemacht. Dann gilt noch der Satz:

16. Je nachdem (für $\gamma > 0$) die Wurzel $\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}$ in der Formel (16) *positives oder negatives Vorzeichen erhält, gilt*

$$0 < \psi_1 < \pi \quad \textit{bzw.} \quad \pi < \psi_2 < 2\pi,$$

und die Formel (19″) *stellt dann, von dem Periodenglied $n\pi$ abgesehen, den spitzen bzw. den stumpfen (positiven) Winkel dar.*

§ 24. Der Satz vom Höhenschnittpunkt in einem Dreieck.

Schon im Bd. I auf S. 48 haben wir gesehen, daß drei beliebige Geraden mit den (nicht in einer Geraden liegenden) Schnittpunkten A, B, C die projektive Ebene in vier Dreiecksgebiete zerlegen (Fig. 37 S. 48 im Bd. I). *Im folgenden soll dann wieder wie früher unter einem Dreieck ganz allgemein eines dieser vier Gebiete verstanden sein.* In der *elliptischen* Geometrie sind natürlich alle vier Gebiete eigentliche Dreiecke, d. h. alle Punkte des einzelnen Dreiecks sind eigentliche Punkte. Liegt dagegen die *euklidische* oder die *hyperbolische* Geometrie in der Ebene vor, so wollen wir voraussetzen, daß die drei Punkte A, B, C eigentliche Punkte sind. Dann ist ersichtlich stets eines und nur eines der vier Dreiecksgebiete ein eigentliches Dreieck. Im folgenden soll es sich dann nur um solche *eigentliche* Dreiecke (oder Dreiecksflächen) handeln, wenn nicht ausdrücklich anderes bemerkt wird. Wir heben noch hervor, daß jeder Winkel des Dreiecks ein *konkaver* Winkel ist.

Die einzelne *Höhe* eines Dreiecks (oder das Lot von dem einzelnen Eckpunkt auf die Gegenseite) ist ja die Verbindungslinie der Ecke mit dem absoluten Pol der Gegenseite. In der elliptischen Geometrie kann nun sehr wohl die einzelne Ecke selbst der absolute Pol der Gegenseite sein. In solchem Falle ist *jede* Gerade durch die Ecke als Höhengerade anzusprechen. (Wenn sogar *zwei* Ecken die absoluten Pole der Gegenseiten sind, so gilt dies ja auch für die *dritte* Ecke, vgl. die Fig. 46 der vier Polardreiecke, S. 33.) Von diesem Ausnahmefalle sei im folgenden abgesehen. Dann aber gilt für alle drei Geometrien, also unabhängig vom Parallelenaxiom, der Satz:

1. In jedem Dreieck, in dem keine Ecke der absolute Pol der Gegenseite ist, gehen die drei Höhengeraden p, q, r durch denselben Punkt S (Satz vom Höhenschnittpunkt).

Diesen Satz können wir auch, wie folgt, aussprechen (vgl. z. B. den Satz 3 S. 8):

1a. Wird ein Dreieck ABC um jede seiner Seiten umgewendet, so daß die neuen kongruenten Dreiecke BCA_0, CAB_0 und ABC_0 entstehen, so gehen die Verbindungslinien AA_0, BB_0 und CC_0 oder p, q, r durch denselben Punkt S (Fig. 103).

Wir wollen den Beweis dieses Satzes gleich gemeinsam für die elliptische und hyperbolische Geometrie führen. Demgemäß stellen wir den absoluten Kegelschnitt in der Form dar

$$x^2 + y^2 + \tau s^2 = 0, \tag{1}$$

wo dann τ bzw. gleich $+\varkappa$ oder $-\varkappa$ und $\mp\varkappa$ die (absolut sehr große) Weltkonstante ist.

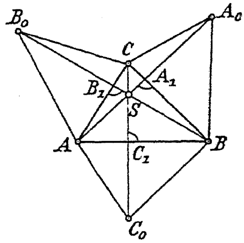


Fig. 103.

Gegeben seien nun die Eckpunkte des Dreiecks ABC durch die Koordinaten x_i, y_i, s_i (Fig. 104) für die hyperbolische Geometrie. Die absoluten Pole A', B', C' der drei Seitengeraden mögen die Koordinaten x_i', y_i', s_i' haben. Die drei Höhengeraden p, q, r sind die Verbindungslinien AA', BB' und CC'.

Die Seitengerade BC hat nun als Verbindungslinie der Punkte B, C die Gleichung

$$x(y_2 s_3 - s_2 y_3) + y(s_2 x_3 - x_2 s_3) + s(x_2 y_3 - y_2 x_3) = 0 \tag{2}$$

und als absolute Polare von A' die Gleichung

$$x x_1' + y y_1' + \tau s s_1' = 0. \tag{3}$$

Es gilt also $\quad x_1' : y_1' : \tau s_1' = (y_2 s_3 - s_2 y_3) : (s_2 x_3 - x_2 s_3) : (x_2 y_3 - y_2 x_3).$

Analog ist $\quad x_2' : y_2' : \tau s_2' = (y_3 s_1 - s_3 y_1) : (s_3 x_1 - x_3 s_1) : (x_3 y_1 - y_3 x_1)$

und $\quad x_3' : y_3' : \tau s_3' = (y_1 s_2 - s_1 y_2) : (s_1 x_2 - x_1 s_2) : (x_1 y_2 - y_1 x_2).$

Zur Vereinfachung der Rechnung können wir nun annehmen, daß der Eckpunkt A der Anfangspunkt des Koordinatensystems ist und der Punkt B auf der x-Achse (jedoch nicht auf der absoluten Polaren von A) gelegen ist. Denn wir können ja entweder das Koordinatensystem dementsprechend gewählt oder auch das ursprüngliche Dreieck selbst durch ein wie gewünscht gelegenes kongruentes Dreieck ersetzt denken. Dann ist also $x_1 = y_1 = 0$ und $y_2 = 0$ und es wird dann für $s_1 = s_2 = 1$

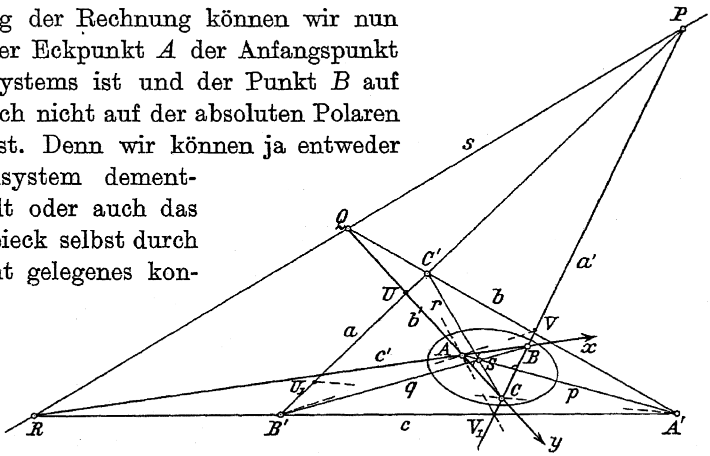


Fig. 104.

$$\left.\begin{aligned} x_1' : y_1' : \tau s_1' &= (-y_3) : (x_3 - x_2 s_3) : x_2 y_3, \\ x_2' : y_2' : \tau s_2' &= \quad y_3 \quad : \quad (-x_3) \quad : \quad 0, \\ x_3' : y_3' : \tau s_3' &= \quad 0 \quad : \quad x_2 \quad : \quad 0. \end{aligned}\right\} \tag{4a, b, c}$$

Bezeichnen wir jetzt die homogenen Linienkoordinaten der drei Höhengeraden mit u_i, v_i, t_i, so ergibt sich nunmehr

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= x_2 s_3 - x_3, \\ v_1 &= -y_3, \\ t_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5a, b, c}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= x_3, \\ v_2 &= y_3, \\ t_2 &= -x_2 x_3 \end{aligned}\right\} \tag{6a, b, c}$$

und

$$\left.\begin{aligned} u_3 &= -x_2 s_3, \\ v_3 &= 0, \\ t_3 &= x_2 x_3. \end{aligned}\right\} \tag{7a, b, c}$$

Denn die Gleichungen $u_i x + v_i y + t_i s = 0$ der Höhengeraden sind erfüllt für $(x, y, s) = (x_i, y_i, s_i)$ und für $(x, y, s) = (x_i', y_i', s_i')$. Diese drei Geraden u_i, v_i, t_i gehen aber durch denselben Punkt, wenn die Determinante ihrer Koordinaten gleich 0 ist. Es ist aber in der Tat

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & t_1 \\ u_2 & v_2 & t_2 \\ u_3 & v_3 & t_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x_2 s_3 - x_3 & -y_3 & 0 \\ x_3 & y_3 & -x_2 x_3 \\ -x_2 s_3 & 0 & x_2 x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 s_3 - x_3)\, x_2 x_3 y_3 + y_3 (x_2 x_3^2 - x_2^2 x_3 s_3) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Hiermit ist dann der Satz 1 bewiesen.

Wir wollen aber hervorheben: *Der Satz vom Höhenschnittpunkt in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie ist nur ein spezieller Fall eines sehr eigenartigen, allgemeinen Satzes der projektiven Geometrie,* so daß jener eine Selbstverständlichkeit darstellt, wenn dieser allgemeine Satz bewiesen wird. Hiermit wird dann also der Satz vom Höhenschnittpunkt von einem höheren Standpunkte aus beleuchtet. Dieser projektive Satz aber lautet:

2. Es sei ein beliebiger (nicht zerfallender, doch einteiliger oder nullteiliger) Kegelschnitt gegeben. Ferner seien A, B, C drei solche beliebige Punkte, daß kein Punkt von ihnen der Pol der Verbindungsgeraden der beiden anderen Punkte ist. Die Verbindungsgeraden a', b', c' der Punkte A, B, C sollen ferner die Pole A', B', C' haben, die Punkte A, B, C also als Polaren bzw. die Verbindungslinien a, b, c der Pole A', B', C' (Fig. 104). *Dann schneiden sich die Geradenpaare a, a' sowie b, b' und c, c' stets in drei Punkten P, Q, R einer Geraden s und ebenso gehen die Verbindungslinien AA', BB', CC' durch denselben Punkt S, den Pol der Geraden s.*

Die Fig. 104 stellt den Fall dar, daß der gegebene Kegelschnitt einteilig ist, doch ist die entsprechende Figur für einen nullteiligen Kegelschnitt jener ganz

analog zu zeichnen. (In der Fig. 104 sind die mit demselben großen und kleinen Buchstaben bezeichneten Elemente stets zueinander Pol und Polare.) In dem nachfolgenden Beweise dieses Satzes tritt ein Unterschied zwischen den beiden Arten von Kegelschnitten nicht hervor. Zur Vereinfachung des Beweises können wir nun annehmen, daß die Punkte A, B, C die Eckpunkte des dem projektiven Koordinatensystem zugrunde liegenden Fundamentaldreiecks seien. Diese Punkte A, B, C haben dann bzw. die Koordinaten $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 0,)$ und $(0, 1, 0)$. Der Kegelschnitt sei nun durch die allgemeine homogene Gleichung gegeben (vgl. die Gleichung (1′) Bd. I S. 154)

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma s^2 + 2\delta\, xy + 2\varepsilon\, xs + 2\zeta\, ys = 0,$$

die Polare eines beliebigen Punktes (x_0, y_0, s_0) durch die Gleichung (vgl. die Gleichung (5) Bd. I S. 180)

$$\alpha x x_0 + \beta y y_0 + \gamma s s_0 + \delta(x y_0 + y x_0) + \varepsilon(x s_0 + s x_0) + \zeta(y s_0 + s y_0) = 0.$$

Die Polaren a, b, c der Punkte A, B, C lauten also

$$\gamma s + \varepsilon x + \zeta y = 0,$$
$$\alpha x + \delta y + \varepsilon s = 0,$$
$$\beta y + \delta x + \zeta s = 0.$$

Die Geraden a', b', c' aber haben die Gleichungen $s = 0$, $x = 0$ und $y = 0$. Also haben die Schnittpunkte P, Q, R der Geradenpaare a, a' sowie b, b' und c, c' die Koordinaten

$$(-\zeta) : \varepsilon : 0,$$
$$0 : (-\varepsilon) : \delta,$$
$$(-\zeta) : 0 : \delta.$$

Die Determinante

$$\begin{matrix} -\zeta & \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon & \delta \\ -\zeta & 0 & \delta \end{matrix}$$

dieser Koordinaten ist aber gleich 0, d. h. die Schnittpunkte P, Q, R liegen wirklich auf einer Geraden und damit gehen auch ihre Polaren p, q, r durch denselben Punkt S. (Im Grunde ist die ganze Figur nur die Desarguessche Figur für die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$.)

So einfach der analytische Beweis des Satzes 2 ist, so gewinnen wir gewiß doch noch einen anschaulicheren Einblick in sein Wesen, wenn wir auch einen *Beweis ohne analytische Rechnung* anschließen.

Gegeben seien zunächst (Fig. 104) zwei *beliebige* Geraden a', b' mit dem Schnittpunkt C und ihre Pole A', B' mit der Polaren $A'B' = c$ von C bezüg-

lich eines gegebenen (einteiligen oder nullteiligen) Kegelschnittes. Ferner sei noch ein *beliebiger* Punkt A auf b' angenommen; die Polare von A sei die Gerade a durch B'. Das Strahlenbüschel mit dem Träger A (oder das Strahlenbüschel (A)) ist nun projektiv zu der Punktreihe ihrer Pole auf der Geraden a. Diese Punktreihe ist also auch projektiv zu der Punktreihe der Schnittpunkte des Strahlenbüschels (A) mit der Geraden a'. Dann sind auch die beiden Strahlenbüschel aufeinander projektiv bezogen, welche die Punktreihe a vom Punkte C und die Punktreihe a' vom Punkte B' projizieren. (In der Fig. 104 sind z. B. c', C' B, r, q entsprechende Elemente der Aufeinanderfolge dieser fünf Projektivitäten.) Die zueinander projektiven Strahlenbüschel (C) und (B') sind aber zueinander perspektiv, da die Verbindungslinie $B'C$ ihrer Träger sich selbst entspricht. (Denn es sind auch b', B', C, CB' und $B'C$ entsprechende Elemente.) Also müssen sich entsprechende Strahlen auf einer Geraden schneiden. Es entspricht nun der Strahl $CA = b'$ dem Strahle $B'A$, da der Schnittpunkt U von a, b' der Pol von AB' ist, und es entspricht der Strahl CA' dem Strahle $B'A'$, da der Schnittpunkt U_1 von $A'C$ und a der Pol von AV_1 ist, wo V_1 der Schnittpunkt von a', c ist. Folglich schneiden sich überhaupt je zwei entsprechende Strahlen auf der Geraden AA'. Dann aber müssen sich in der Fig. 104 auch die Strahlen $B'B$ und CC' (oder r, q) in einem Punkte S auf AA' schneiden. Beachten wir noch, daß die Verbindungslinie $A'C' = b$ die Polare vom Punkte B ist, so ist mit der vorstehenden Ausführung also der projektive Satz 2 bewiesen.

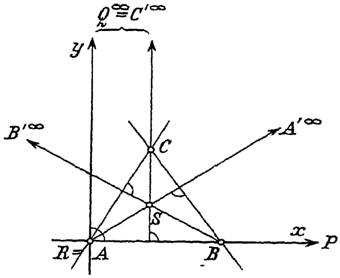


Fig. 105.

Für die *euklidische Geometrie* gedenken wir der Entwicklungen des § 10, insbesondere des dort eingeführten Koordinatensystems der Fig. 44 S. 31. Es modifiziert sich der vorstehende Beweis dann folgendermaßen: Die drei absoluten Pole A', B', C' der Dreiecksseiten liegen ja auf der unendlich fernen Geraden (vgl. den Satz 1 S. 29 und den Satz 6 S. 30); für die Koordinaten x_i', y_i', s_i' dieser Pole ist also $s_i' = 0$. Der unendlich ferne Punkt der Seitengeraden BC z. B. wird durch die Koordinaten $\bar{x}_1$, $\bar{y}_1$, 0 mit der Gleichung

$$\bar{x}_1 : \bar{y}_1 = (s_2 x_3 - x_2 s_3) : (s_2 y_3 - y_2 s_3)$$

gegeben. Nach der Gleichung (1) S. 32 gilt dann

$$x_1' \bar{x}_1 + y_1' \bar{y}_1 = 0,$$

d. h. es ist $x_1' : y_1' : s_1' = (-\bar{y}_1) : \bar{x}_1 : 0 = (y_2 s_3 - s_2 y_3) : (s_2 x_3 - x_2 s_3) : 0.$

Also ergibt sich für $x_1 = y_1 = y_2 = 0$ und $s_1 = s_2 = 1$ jetzt (Fig. 105):

$$\begin{aligned} x_1' : y_1' : s_1' &= (-y_3) : (x_3 - x_2 s_3) : 0, \\ x_2' : y_2' : s_2' &= y_3 : (-x_3) : 0, \\ x_3' : y_3' : s_3' &= 0 : x_2 : 0. \end{aligned} \qquad (4'\text{a, b, c})$$

Die Linienkoordinaten u_i, v_i, t_i der drei Höhengeraden sind dann dieselben, wie sie die Gleichungen (5), (6), (7) angeben, so daß der Beweis des Satzes 1 durch Verschwinden der Determinante aus diesen Linienkoordinaten auch für die euklidische Geometrie erbracht ist.

Aus dem Satze 1 folgt für alle drei Geometrien sogleich weiter:

3. Ist das Dreieck, in dem keine Ecke der absolute Pol der Gegenseite ist, nicht rechtwinklig, so durchschneidet wenigstens eine der drei Höhengeraden den zugehörigen Innenwinkel des Dreiecks.

Der Höhenschnittpunkt S kann dann ja nicht auf einer Seitengeraden des Dreiecks liegen. (Denn es kann der Höhenschnittpunkt S nicht mit einer Ecke des Dreiecks zusammenfallen. Läge aber S z. B. auf der Seitengeraden BC, ohne mit B oder C selbst zusammenzufallen, so wäre ja $AS \perp BC$ und $AC \perp BC$, da BS die von B ausgehende Höhe ist, d. h. es wäre A der absolute Pol von BC, was ausgeschlossen ist.) Der Satz folgt dann einfach daraus, daß überhaupt von den drei Verbindungsgeraden eines *beliebigen*, nicht auf einer Seitengeraden gelegenen Punktes S der Ebene mit den Ecken A, B, C eines Dreiecks wenigstens eine den zugehörigen Innenwinkel durchschneidet.

3a. Ist das Dreieck aber ein rechtwinkliges, so fallen ja zwei Höhengeraden mit den Schenkelseiten des rechten Winkels zusammen, während, allgemein gesprochen, die dritte den zugehörigen Innenwinkel oder seinen Nebenwinkel, den Außenwinkel, durchschneidet.

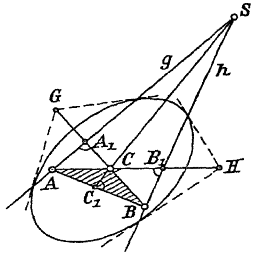


Fig. 106.

Es sei endlich noch erwähnt, daß sehr wohl der Höhenschnittpunkt S eines Dreiecks ein *uneigentlicher* Punkt sein kann. In der *euklidischen* Geometrie zwar könnte dies ersichtlich nur eintreten, wenn die drei Ecken A, B, C des Dreiecks auf derselben Geraden lägen, das Dreieck also ausgeartet wäre, was wir natürlich ausschließen. In der *hyperbolischen* Geometrie dagegen können wir uns folgendermaßen leicht ein solches Dreieck konstruieren: Wir ziehen von dem beliebigen überunendlich fernen Punkte S zwei eigentliche Sekanten g, h des absoluten Kegelschnittes und bestimmen deren absolute Pole G, H (Fig. 106). Dann verbinden wir H mit einem eigentlichen Punkte A von g. Diese Verbindungslinie schneide h in dem eigentlichen Punkte B_1. Endlich verbinden wir G mit einem Punkte C der eigentlichen Strecke AB_1 so, daß auch der Schnittpunkt B mit h ein eigentlicher Punkt ist. Das Dreieck ABC hat dann die verlangte Eigenschaft.

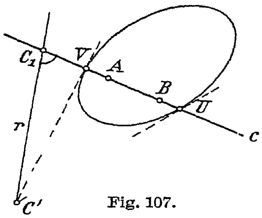


Fig. 107.

Die *Höhenfußpunkte* A_1, B_1, C_1 sind jedoch in jedem Dreieck stets *eigentliche* Punkte. Denn wäre in der hyperbolischen Geometrie z. B. der Höhenfußpunkt C_1 ein uneigentlicher Punkt (Fig. 107), so wäre auch die Höhengerade r selbst eine uneigentliche Gerade, da sie ja auch durch den absoluten Pol C' der Seitengeraden AB, den Schnittpunkt der Tangenten in den unendlich fernen Punkten U, V von AB, hindurchgehen müßte. Die Höhengerade r könnte also nicht den eigentlichen Eckpunkt C enthalten.

Analoges gilt in der euklidischen Geometrie.

§ 25. Die Winkelsumme im Dreieck.

Wir wenden uns nun zu der besonders wichtigen Frage, wie groß die *Winkelsumme in einem Dreieck* ist. Hier gilt der folgende Satz, der auch in der historischen Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie seit Euklid im Mittelpunkte der Forschungen gestanden hat:

1. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel in der elliptischen Geometrie größer, in der hyperbolischen Geometrie kleiner, in der euklidischen Geometrie gleich zwei Rechten.[1])

Wir wissen übrigens schon: In den Figuren 44 S. 31, 52 S. 38 und 65 S. 52 bzw. der euklidischen, elliptischen und hyperbolischen Geometrie besitzt das in der Koordinatenecke gelegene Viereck RE_1EE_2 drei rechte Winkel und bzw. einen rechten, einen stumpfen oder einen spitzen Winkel. Dieses Viereck ist aber durch die Diagonale RE in zwei kongruente (rechtwinklige) Dreiecke zerlegt mit der Winkelsumme, die bzw. gleich, größer oder kleiner als π ist. Auch gibt uns die Figur 46 S. 33 der elliptischen Geometrie ja Dreiecke mit der Winkelsumme $3 \cdot \frac{\pi}{2}$.

Um nun diesen Satz 1 allgemein zu beweisen, beachten wir zunächst folgendes: Wenn nicht schon das gegebene Dreieck rechtwinklig ist, so können wir es jedenfalls nach dem Satze 3 S. 125 durch eine im Innern des Dreiecks verlaufende Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

2. Wir brauchen daher den Satz 1 nur für beliebige rechtwinklige Dreiecke zu beweisen, dann gilt er demgemäß auch für jedes beliebige Dreieck.

Wir wenden uns nun zunächst zu der *elliptischen* Geometrie. Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck RAB mit dem rechten Winkel an der Ecke R. Wir denken zu der Ecke R die absolute Polare PQ mit den Schnittpunkten P, Q bzw. auf den Seitengeraden RA und RB hinzukonstruiert. Die positiven

1) Dieser Satz ist auch schon in die Schulgeometrie vorgedrungen; vgl. z. B. Reidt, Wolff, Kerst, Die Elemente der Mathematik, Bd. IV, Berlin 1927, S. 283 unten.

Richtungen der Geraden RA und RB seien dann so gewählt, daß die Strecken $\overrightarrow{RA}$ und $\overrightarrow{RB}$ die Seiten des Dreiecks RAB sind. Ist dann die eine Seite $\overrightarrow{RA}$ größer als $\overrightarrow{RP} = \frac{l}{2}$ oder gleich $\overrightarrow{RP}$ $\Big($die andere Seite $\overrightarrow{RB}$ größer, gleich oder kleiner als $\overrightarrow{RQ} = \frac{l}{2}\Big)$ (Fig. 108), so ist der Dreieckswinkel $R\widehat{B}A$ größer oder gleich dem Winkel $R\widehat{B}P$, der ein rechter Winkel ist, d. h. der Winkel $R\widehat{B}A$ ist ein stumpfer oder rechter Winkel, die Winkelsumme des gegebenen Dreiecks RBA also größer als zwei Rechte.

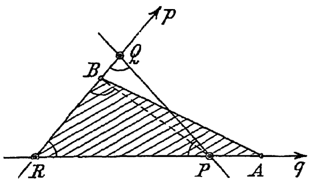


Fig. 108.

Es bleibt daher nur noch der Fall zu betrachten, daß sowohl $\overrightarrow{RA}$ kleiner als $\overrightarrow{RP}$, wie $\overrightarrow{RB}$ kleiner als $\overrightarrow{RQ}$ ist (Fig. 109). Dann aber verbinden wir auch den Punkt P mit B und ferner noch Q mit der Mitte M der Seite AB. Die letzte Verbindungslinie QM oder g schneidet die Seite $\overrightarrow{RA}$ innerlich im Punkte S (gemäß dem auf das Dreieck RAB angewandten Axiom II, 4 Bd. I S. 10). Es sei nun G der absolute Pol von g. Da g durch Q geht, muß G ja auf der Geraden RP, der Polaren von Q, liegen und überdies auf der Strecke $\overrightarrow{PR}$; denn die konjugierten Pole auf RP bilden ja eine *elliptische* Involution, so daß die zwei Paare entsprechender Punkte R, P und S, G sich trennen müssen (vgl. die Sätze 9 S. 35 und 10 S. 36). Wir können in der Folge für unsere Betrachtung diejenige Dreiecksfläche RQG als begrenztes Gebiet wählen, der auch das gegebene Dreieck RAB angehört. Wir ziehen dann noch die Verbindungslinie BG. Es ist leicht zu zeigen: Die Gerade BG schneidet die Strecke QS des begrenzten Gebietes stets in einem Punkte T zwischen M, Q (T liegt nämlich zwischen Q, S, aber nicht zwischen M, S). Nun erkennen wir weiter: Der Winkel $B\widehat{T}M$ ist ein rechter Winkel, da ja G der absolute Pol von g ist. Folglich ist nach dem Kongruenzsatz des Satzes 17 S. 21 das Dreieck $ASM \cong \triangle BTM$, also $\sphericalangle M\widehat{A}S = \sphericalangle M\widehat{B}T$. Dann aber ist die Summe der Winkel $R\widehat{A}B$ und $R\widehat{B}A$ gleich dem Winkel $R\widehat{B}T$ und damit *größer* als der rechte Winkel $R\widehat{B}P$, d. h. *die Summe der Winkel des Dreiecks RAB ist größer als zwei Rechte.*

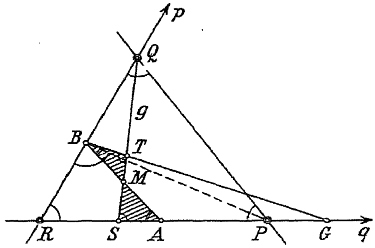


Fig. 109.

Wir bemerken noch: In der elliptischen Geometrie ist die Summe der Drei-

eckswinkel stets auch kleiner als 3π, da ja jeder einzelne Winkel nach unserer Definition des Dreiecks (vgl. S. 48 Bd. I) kleiner als π ist. Doch können die Dreiecke sich z. B. beliebig einer Grenzlage annähern, in der alle drei Winkel einzeln gleich π sind; allerdings ist diese Grenzlage selbst ausgeartet, da die drei Ecken in derselben Geraden liegen (vgl. die Fig. 110a). Andererseits kann die Winkelsumme sich beliebig dem Werte π annähern (vgl. die Fig. 110b).

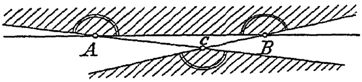


Fig. 110a.

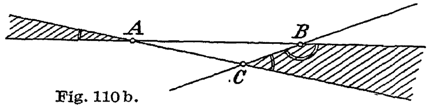


Fig. 110b.

Nun wollen wir weiter den Beweis des Satzes 1 für die *hyperbolische* Geometrie führen. Gegeben sei wieder das rechtwinklige Dreieck RAB mit dem rechten Winkel an der Ecke R (Fig. 111). Auch denken wir wieder zu der Ecke R die absolute Polare PQ mit den Schnittpunkten P, Q bzw. auf den Seitengeraden RA und RB hinzukonstruiert und auch die positiven Richtungen der Geraden RA und RB wie vorhin gewählt. Da die Punkte P, Q überunendlich ferne Punkte sind, so liegen die Eckpunkte A, B stets auf den Strecken $\overrightarrow{RP}$ und $\overrightarrow{RQ}$. Jetzt verbinden wir wieder P mit B, sowie Q mit der Mitte M von AB. Die Gerade QM oder g schneidet die Seite RA innerlich im Punkte S. Es sei wieder G auf der Geraden RP der absolute Pol zur Geraden g. Es muß diesmal aber G auf der Strecke $\overrightarrow{AP}$ liegen; denn die konjugierten Pole auf RP bilden eine *hyperbolische* Involution, so daß die beiden Paare entsprechender Punkte R, P und S, G sich nicht trennen (vgl. die Sätze 4 und 5 S. 45), und überdies ist G ein überunendlich ferner Punkt. Die Gerade BG schneide nun QS im Punkte T. Dann sind die zwei rechtwinkligen Dreiecke ASM und BTM kongruent, also ist $\sphericalangle M\hat{A}S = \sphericalangle M\hat{B}T$. Damit aber ist die Summe der Winkel $R\hat{A}B$ und $R\hat{B}A$ gleich dem Winkel $R\hat{B}T$, also *kleiner* als der rechte Winkel $R\hat{B}P$, d. h. *die Summe der Winkel des Dreiecks RAB ist kleiner als zwei Rechte.*

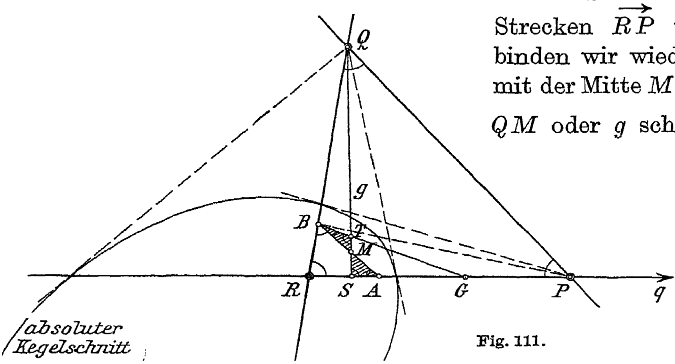


Fig. 111.

Wir bemerken noch: Die *kleinste Winkelsumme* eines Dreiecks nähert sich beliebig der Zahl 0 an. Wir brauchen ja nur an das dreifach asymptotische Dreieck der Figur 100 S. 111 zu denken, dessen drei Ecken auf dem absoluten Kegelschnitt liegen. Andererseits nähert sich die *größte Winkelsumme* eines Dreiecks beliebig der Zahl π. Denn wir können ja als andere Grenzlage für die Dreiecke ein Dreieck mit den Winkeln $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ erhalten, das in eine Strecke ausgeartet ist (Fig. 112), oder auch ein Dreieck mit den Winkeln π, 0, 0.

Werfen wir nun endlich noch einen Blick auf den Beweis des Satzes 1 in der *euklidischen* Geometrie. Natürlich ist ein solcher Beweis aus der Schulgeometrie her jedem wohlbekannt. Wollen wir aber den Beweis analog wie in den anderen beiden Geometrien führen, so brauchen wir nur zu beachten: Es ist jetzt in der analogen Figur zur Fig. 109 der Punkt G mit dem Punkte P zusammengefallen, da ja die konjugierten Pole auf der Geraden RP eine *parabolische* Involution mit dem Doppelpunkte P bilden. (Die Gerade PQ ist ja auch die unendlich ferne Gerade.)

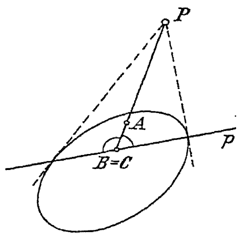


Fig. 112.

Da eben *alle* Dreiecke in der elliptischen, hyperbolischen und euklidischen Geometrie eine Winkelsumme bzw. größer, kleiner oder gleich π besitzen, so gilt dann ganz von selbst auch der Satz:

3. Wenn in einem einzigen Dreieck die Winkelsumme gleich, kleiner oder größer als π ist, so gilt notwendig in der projektiven Ebene bzw. die euklidische, hyperbolische oder elliptische Geometrie.

Hieraus folgt aber weiter: Wir hätten zweifellos statt der Form des Parallelenaxioms, wie sie durch den Satz 3 S. 24 eingeführt ist, auch folgende neue Form des Parallelenaxioms wählen können:

4. Es soll eine der folgenden Aussagen gelten: Es sei in einem einzigen vorgegebenen Dreieck ABC die Winkelsumme gleich bzw. kleiner oder größer als π.

Jedes der drei im Satze 4 vereinigten Parallelenaxiome ist deswegen eigentlich vorzuziehen, weil wir ja das Dreieck ABC in einem begrenzten Gebiet, das vor unseren Augen liegt, annehmen können, und dann also nur eine Aussage für Elemente des begrenzten Gebietes ausgesprochen wird.

Wir wollen, um in diese Verhältnisse tiefer hineinzublicken, doch noch in aller Kürze ausführen, *wie aus dieser neuen Form des Parallelenaxioms dann die Aussage des alten Parallelenaxioms sich als ein Satz ergibt.*[1])

1) Vgl. wegen dieser Frage: Hilbert, a. a. O. 1930, S. 50 und die dort angeführte weitere Literatur, insbesondere M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkel-

An die Stelle des alten Parallelenaxioms, Satz 3 S. 24, tritt dann in den Entwicklungen des Abschnittes II (§§ 9—14) zunächst der folgende Satz, der die Betrachtungen der Seiten 22—24 zusammenfaßt:

5. Für eine bestimmte eigentliche Gerade g gibt es folgende drei Möglichkeiten: Entweder besitzt die Gerade g nur einen unendlich fernen Punkt U oder zwei unendlich ferne Punkte U, V oder gar keinen unendlich fernen Punkt.

Für diese drei Möglichkeiten gelten dann die weiteren Entwicklungen der §§ 9—14. Insbesondere wissen wir dann, daß für das absolute Polarsystem auch die drei Möglichkeiten vorliegen: Entweder hat das absolute Polarsystem die Eigenschaften, die im § 10 entwickelt sind (vgl. die Sätze 4—7 daselbst), oder aber es ist identisch mit dem Polarsystem eines einteiligen Kegelschnittes (§ 14) oder eines nullteiligen Kegelschnittes (§ 12). *Insbesondere bilden also die konjugierten absoluten Pole auf einer eigentlichen Geraden g bzw. eine parabolische, hyperbolische oder elliptische Involution.* Jedenfalls gilt dann weiter stets auch der Höhenschnittpunktssatz 1 S. 120, sowie der Satz 3 S. 125.

Nun erst stellen wir die neue Form des Parallelenaxioms auf, wie sie im Satze 4 angegeben ist. Dann aber können wir gleichsam die Entwicklungen der S. 126—129 umgekehrt ausgeführt denken. Es gelte z. B. das Axiom:

4a. In einem einzigen bestimmten Dreieck ABC sei die Winkelsumme größer als zwei Rechte.

Ist das Dreieck ABC nicht schon rechtwinklig, so können wir es nach dem Satze 3 S. 125 jedenfalls in zwei rechtwinklige Dreiecke, etwa die Dreiecke ABR und CBR zerlegen (Fig. 113). Dann muß auch wenigstens in einem dieser beiden rechtwinkligen Dreiecke die Winkelsumme ebenfalls größer als zwei Rechte sein, d. h.:

6a. Es gibt dann in allen Fällen stets auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Winkelsumme größer als zwei Rechte.

Ist dieses rechtwinklige Dreieck etwa das Dreieck ABR, wo R der Scheitel des rechten Winkels ist, so können wir weiter zur Ecke R die absolute Polare PQ hinzunehmen, wo P bzw. Q der absolute Pol der Dreiecksgeraden RB bzw. RA ist. Auf den Geraden RP und RQ seien dann wieder solche Richtungen als positive festgelegt, daß die Strecken $\overrightarrow{RA}$ und $\overrightarrow{RB}$ die Dreiecksseiten sind. Ist dann etwa A innerhalb der Strecke $\overrightarrow{PR}$ oder im Punkte P (und B auf der Strecke $\overrightarrow{RQ}$ oder $\overrightarrow{QR}$) gelegen, so sind alle Punkte der Geraden

summe im Dreieck, Math. Ann., Bd. 53, 1900, S. 404 (Dissertation, Göttingen 1900) sowie: Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908, S. 24 ff. (das Werk des Paters Gerolamo Saccheri, 1667—1733).

PR *eigentliche* Punkte, d. h. die Gerade PR enthält keine unendlich fernen Punkte.

7a. Das Axiom 4a führt dann also notwendig zur elliptischen Geometrie.

Wir wollen gleich hier bemerken, daß diese Lage des Punktes A auf $\overrightarrow{PR}$ oder in P oder auch die Lage des Punktes B auf $\overrightarrow{QR}$ oder in Q überhaupt nur dann in Frage kommen kann, wenn die Winkelsumme des Dreiecks ABR größer als π ist (vgl. die Entwicklungen der S. 137). Wieder bleibt nur noch der Fall zu betrachten, daß die Ecke A innerhalb der Strecke $\overrightarrow{RP}$ und die Ecke B innerhalb der Strecke $\overrightarrow{RQ}$ gelegen ist (d. h. daß die Winkel des Dreiecks an den Ecken A und B spitz sind). Dann aber folgt analog den Überlegungen der S. 127 (vgl. die Fig. 109), daß die Paare konjugierter Pole P, R und S, G sich notwendig trennen müssen, d. h. die konjugierten Pole auf der Geraden RP bilden eine *elliptische* Involution. *Wieder gilt dann der Satz 7a.*

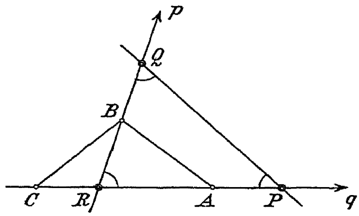


Fig. 113.

Analog ist in dem Falle vorzugehen, daß das Axiom gilt:

4b. In einem einzigen Dreieck ABC sei die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte.

6b. Es gibt dann stets auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Winkelsumme kleiner als zwei Rechte.

7b. Das Axiom 4b führt dann notwendig zur hyperbolischen Geometrie.

Endlich gelte das Axiom:

4c. In einem einzigen Dreieck ABC sei die Winkelsumme gleich zwei Rechten.

6c. Es gibt dann stets auch ein rechtwinkliges Dreieck mit der Winkelsumme gleich zwei Rechten.

Denn in jedem der beiden rechtwinkligen Dreiecke, in welche das Dreieck ABC durch eine im Innern verlaufende Höhe zerlegt wird, kann die Winkelsumme nicht größer oder kleiner als zwei Rechte sein. Denn sonst würde ja die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie vorliegen, also in *jedem* Dreieck die Winkelsumme größer bzw. kleiner als zwei Rechte sein, was dem Axiom 4c widerspricht. In jedem der genannten beiden rechtwinkligen Dreiecke muß also die Winkelsumme gleich π sein. Es folgt dann weiter (analog wie bei der elliptischen Geometrie):

7c. Das Axiom 4c führt dann notwendig zur euklidischen Geometrie.

Wir wollen noch folgende Betrachtungen anschließen: Es seien in der *hyperbolischen* oder in der *elliptischen* Geometrie *zwei Dreiecke mit paarweise gleichen Winkeln* gegeben. Wenn dann die beiden Dreiecke nicht kongruent wären, dann wären auch keine entsprechenden Seiten einander gleich. Dann müßte es aber stets zwei Seiten des einen Dreiecks geben, die kleiner als die entsprechenden Seiten des anderen Dreiecks wären. Es mögen dementsprechend die Seiten AB und AC des einen Dreiecks kleiner als die Seiten $A'B'$ und $A'C'$ des anderen Dreiecks sein: Wir könnten dann die beiden Dreiecke so aufeinander gelegt denken, daß die Ecken A, A' und die von ihnen ausgehenden Schenkel des Winkels $\alpha = \alpha'$ zusammenfallen (Fig. 114 für die hyperbolische Geometrie und Fig. 115 für die elliptische Geometrie). Dann würde aber in dem Viereck $BB'C'C$ die Winkelsumme gleich 2π sein. Dies aber ist unmöglich.

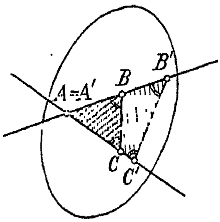


Fig. 114.

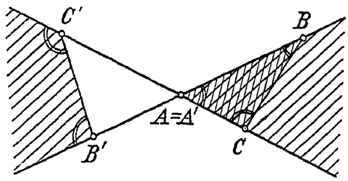


Fig. 115.

Somit haben wir folgendes interessante Resultat gewonnen: Es gilt auch der folgende *Kongruenzsatz:*

8. Zwei Dreiecke sind (in der hyperbolischen und elliptischen Geometrie) kongruent, wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen.

9. In der hyperbolischen wie in der elliptischen Geometrie gibt es also keine ähnlichen Dreiecke, also überhaupt keine Ähnlichkeit der Figuren wie in der euklidischen Geometrie.[1])

1) Vgl. Gauß' Brief an Gerling vom 11. April 1816: „Es ist leicht zu beweisen, daß, wenn Euklids Geometrie nicht die wahre ist, es gar keine ähnlichen Figuren gibt: die Winkel in einem gleichseitigen Dreieck sind dann auch nach der Größe der Seite verschieden, wobei ich gar nichts Absurdes finde." Gauß, Werke, Bd. VIII, S. 169. Das Wort „nichteuklidisch" ist auch zuerst von Gauß eingeführt, vgl. seinen Brief an Schumacher vom 12. Juli 1831, Gauß, Werke, Bd. VIII, S. 216.

Zweiter Teil.

Höhere Gebiete der nichteuklidischen Geometrie.

Fünfter Abschnitt.

Die Kreistheorie.

§ 26. Theorie der Kreise in der elliptischen Geometrie.

Wir wollen nun dazu übergehen, die Theorie der Kreise in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie zu entwickeln. Insbesondere werden wir die *Gleichung der einzelnen Kreislinie* aufzustellen und dann vor allem in dem Sinne zu diskutieren haben, welche *verschiedenen Arten von Kreisen* sich ergeben.

In der *elliptischen Geometrie* liegen die Verhältnisse besonders einfach, weil wir es nur mit eigentlichen Punkten in der projektiven Ebene zu tun haben. Wir knüpfen an die Formel (2′) des Satzes 5 S. 115 für die Entfernung zweier Punkte A, B an, denen wir aber jetzt die Koordinaten (x, y, s) und (x_0, y_0, s_0) zuerteilen wollen. Es lautet also die Formel für die Entfernung zweier Punkte A, B

$$AB = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{c - i\sqrt{ab - c^2}}{c + i\sqrt{ab - c^2}}, \tag{1}$$

wo jetzt gemäß den Gleichungen (3a, b, c) S. 113

$$\left.\begin{aligned} a &= x^2 + y^2 + \varkappa s^2, \\ b &= x_0{}^2 + y_0{}^2 + \varkappa s_0{}^2, \\ c &= x x_0 + y y_0 + \varkappa s s_0 \end{aligned}\right\} \tag{2a, b, c}$$

ist.

Wir betrachten nun den Punkt (x_0, y_0, s_0) als den Mittelpunkt M eines Kreises, den Punkt $A = (x, y, s)$ als einen Punkt der Peripherie. Der Radius des Kreises sei mit ϱ bezeichnet. Dann lautet die Gleichung des Kreises zunächst

$$\varrho = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{c - i\sqrt{ab - c^2}}{c + i\sqrt{ab - c^2}} \tag{3}$$

oder

$$\frac{c}{i\sqrt{ab - c^2}} = \sigma,$$

wo die Konstante $$\sigma = \frac{e^{\frac{\varrho}{\mu}i} + e^{-\frac{\varrho}{\mu}i}}{e^{\frac{\varrho}{\mu}i} - e^{-\frac{\varrho}{\mu}i}} = \frac{1}{i} \operatorname{ctg} \frac{\varrho}{\mu}$$

ist, oder $$c^2 = \tau \cdot a b, \tag{3'}$$

wo die Konstante $$\tau = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1} = \cos^2 \frac{\varrho}{\mu} = \cos^2 \frac{\varrho \pi}{\lambda} \tag{4}$$

und $\lambda = \mu \pi$ die Maßzahl der ganzen Länge l der Geraden ist (vgl. den Satz 3 S. 115).

Die Gleichung (3′) geht endlich gemäß den Gleichungen (2a, b, c) über in die Form
$$(x x_0 + y y_0 + \varkappa s s_0)^2 - C (x^2 + y^2 + \varkappa s^2) = 0, \tag{3''}$$

wo die Konstante $$C = \tau \cdot b = \tau \cdot (x_0{}^2 + y_0{}^2 + \varkappa s_0{}^2) \tag{5}$$
ist.

1. In der *elliptischen* *Geometrie wird also die Gleichung des Kreises um den Mittelpunkt* $M = (x_0, y_0, s_0)$ *mit dem Radius* ϱ *durch die Gleichung* (3″) *gegeben, die vom zweiten Grade ist.*

2. Der Kreis ist also ein spezieller Kegelschnitt.

3. Ist der Koordinatenanfangspunkt R *der Mittelpunkt, so lautet die Gleichung eines solchen Kreises in unhomogenen Koordinaten*

$$x^2 + y^2 = C_0{}^2, \tag{6}$$

wo die Konstante $$C_0 = \sqrt{\frac{\varkappa(1-\tau)}{\tau}} = \sqrt{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varrho}{\mu} = \sqrt{\varkappa} \operatorname{tg} \frac{\varrho \pi}{\lambda} \tag{7}$$
ist.

Die Tangenten in den Schnittpunkten eines solchen Kreises mit der x- bzw. y-Achse gehen durch den Eckpunkt Q bzw. P des Fundamentaldreiecks. Die Gerade PQ ist also auch die Palare des Mittelpunktes R für den Kreis. Insbesondere lautet für $\varrho = 1$ gemäß der Gleichung (9′) S. 114 die Gleichung (6)
$$x^2 + y^2 = 1. \tag{6'}$$

4. Für lim $\varkappa = \infty$ (und zugleich auch lim $\mu = \infty$ *gemäß der Gleichung* (9″) S. 114) *geht die Gleichung* (6) *in die Gleichung*
$$x^2 + y^2 = \varrho^2, \tag{8}$$
also in die Kreisgleichung der euklidischen Geometrie über.

Ebenso gut hätten wir den analogen Grenzübergang auch mit der Gleichung (3″) vornehmen können.

Wir können nun natürlich, wenn $0 < \varrho \leqq \frac{\lambda}{2}$ ist, bei einem gegebenen Kreise mit dem Radius ϱ von den übrigen Messungen des Radius $\pm \varrho + \mu \pi n$ ab-

sehen, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Dann ergibt sich weiter der Satz:

5. In der elliptischen Geometrie gilt für den reellen (positiven) Radius eines Kreises die Ungleichung

$$0 \leqq \varrho \leqq \frac{\mu}{2}\pi = \frac{\lambda}{2},$$

d. h. es gibt bei unserer Festsetzung keine Kreise mit größerem Radius als $\varrho_1 = \frac{\lambda}{2}$.

Die Formel (4) führt nun zu folgender Tabelle:

$\varrho = 0$	$\tau = 1$
$0 < \varrho < \frac{\mu}{2}\pi$	$1 > \tau > 0$
$\varrho = \frac{\mu}{2}\pi$	$\tau = 0$

6a. Für $\varrho = 0$ $(\tau = 1)$ *zerfällt der Kreis in die konjugiert-imaginären Tangenten vom Mittelpunkt M an den absoluten Kegelschnitt.*

Es mag genügen, dieses Resultat an der Gleichung (6) nachzuweisen. Durch eine Bewegung können wir ja jeden beliebigen Kreis so verschieben, daß sein Mittelpunkt in den Koordinatenanfangspunkt fällt. Für $\varrho = 0$, d. h. $C_0 = 0$, zerfällt aber der Kreis der Gleichung (6) in die Tangenten des absoluten Kegelschnittes

$$x \pm iy = 0 \tag{6''}$$

mit den Berührungspunkten $(1, \pm i, 0)$ auf der Polaren $s = 0$ des Koordinatenanfangspunktes.

6b. Für $\varrho = \frac{\mu}{2}\pi$ $(\tau = 0)$ *zerfällt der Kegelschnitt in die doppelt zählende Polare des Mittelpunktes M.*

6c. Nur für die der Ungleichung $0 < \varrho < \frac{\mu}{2}\pi$ *genügenden Radien erhalten wir eigentliche Kreise.*

In der Fig. 116 ist das Büschel der Kreise um denselben Mittelpunkt $M = R$ veranschaulicht. Wir erkennen leicht, daß dieses Kreisbüschel die Ebene gerade einmal überdeckt.

7. Alle Kreise mit demselben Mittelpunkt M berühren den absoluten Kegelschnitt in denselben beiden konjugiert-imaginären Punkten, nämlich in den auf der Polaren von M gelegenen Berührungspunkten der vom Mittelpunkt M ausgehenden Tangenten an den absoluten Kegelschnitt.

Es genügt wieder, diesen Satz für das Büschel aller Kreise um den Koordinatenanfangspunkt zu beweisen. Die genannten Berührungspunkte sind dann ja die Punkte $(1, \pm i, 0)$.

Es gilt dann auch die Umkehrung:

8. Jeder Kegelschnitt, der den absoluten Kegelschnitt in zwei konjugiert-imaginären Punkten berührt, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt M der Pol für die (stets reelle) Verbindungslinie m der Berührungspunkte ist.

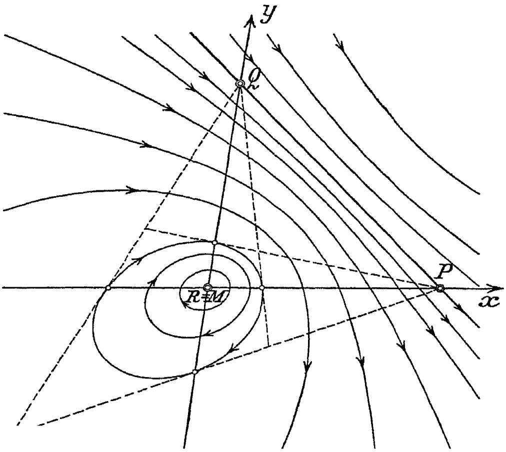


Fig. 116.

Denn es ist ja allgemein ein Kegelschnitt durch zwei Punkte, ihre Tangenten und noch einen dritten Punkt (x_1, y_1, s_1) *eindeutig* bestimmt. Es gibt also stets nur *einen* Kegelschnitt, der den absoluten Kegelschnitt in den beiden gegebenen Punkten berührt und noch durch den gegebenen Punkt (x_1, y_1, s_1) geht. Andererseits gibt es stets *einen* Kreis, der durch den Punkt (x_1, y_1, s_1) geht und dessen Mittelpunkt der Pol der Verbindungsgeraden m der Berührungspunkte ist. Also ist dieser Kreis mit dem Kegelschnitt identisch; damit aber ist der Satz 8 bewiesen.

Der Kreis wird dann durch die Gleichung (3″) dargestellt, wo die Konstante τ durch die Bedingung gegeben ist, daß der Kreis durch den Punkt (x_1, y_1, s_1) geht.

9. Jeder Radius eines Kreises steht auf der Tangente in seinem Endpunkte senkrecht oder

Die orthogonalen Trajektorien eines Strahlenbüschels mit dem Träger M sind die Kreise um M.

Dieser Satz ist ein spezieller Fall des folgenden:

10. Jede Durchmessergerade eines Kreises steht senkrecht auf der Polaren eines jeden ihrer Punkte bezüglich des Kreises.

Für die Gleichung (6) ist ja bei Anwendung homogener Koordinaten die Polare eines Punktes (x_1, y_1, s_1) durch die Gleichung gegeben

$$x x_1 + y y_1 - C_0^2 s s_1 = 0,$$

die Verbindungslinie des Punktes (x_1, y_1, s_1) mit dem Mittelpunkt $(0, 0, 1)$ aber durch die Gleichung

$$x y_1 - y x_1 = 0.$$

Die Linienkoordinaten der beiden Gleichungen sind dann also

$$(u_1, v_1, t_1) = (x_1, y_1, - C_0{}^2 s_1)$$

und

$$(u_2, v_2, t_2) = (y_1, - x_1, 0).$$

Die Sätze 9 und 10 sind dann dadurch bewiesen, daß jetzt

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 + \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2 = 0$$

ist (vgl. die Polarform der Gleichung (18) S. 118).

§ 27. Theorie der Kreise in der hyperbolischen Geometrie.

Wir wenden uns nun zur Kreistheorie in der *hyperbolischen* Geometrie. Hier liegen die Verhältnisse doch komplizierter, weil eben zwei Punkte der projektiven Ebene eine reelle, rein imaginäre oder auch eine gewisse komplexe Entfernung haben können, wie in den §§ 20 und 21 ausgeführt ist.

Allgemein gilt ja für die Entfernung zweier Punkte (x, y, s) und (x_0, y_0, s_0) die Formel

$$AB = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}, \tag{1}$$

wo jetzt

$$\begin{aligned} a &= x^2 + y^2 - \varkappa s^2, \\ b &= x_0{}^2 + y_0{}^2 - \varkappa s_0{}^2, \\ c &= x x_0 + y y_0 - \varkappa s s_0 \end{aligned} \tag{2 a, b, c}$$

ist. Der Punkt $B = (x_0, y_0, s_0)$ sei wieder der Mittelpunkt M eines Kreises, der Punkt $A = (x, y, s)$ ein beliebiger Peripheriepunkt. Die Gleichung des Kreises mit dem Radius ϱ lautet dann

$$\varrho = \frac{\mu}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} \tag{3}$$

oder

$$\frac{\quad}{\sqrt{c^2 - ab}} = \sigma,$$

wo die Konstante

$$\sigma = \frac{e^{\frac{r}{\mu}} + e^{-\frac{r}{\mu}}}{e^{\frac{r}{\mu}} - e^{-\frac{r}{\mu}}} = \operatorname{ctgh} \frac{r}{\mu}$$

ist, oder

$$c^2 = \tau \cdot ab, \tag{3'}$$

wo die Konstante $\tau = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1} = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\varrho}{\mu}} + e^{-\frac{\varrho}{\mu}}\right)^2 = \cosh^2 \frac{\varrho}{\mu}$ (4)

ist, oder endlich $(x x_0 + y y_0 - \varkappa s s_0)^2 - C\,(x^2 + y^2 - \varkappa s^2) = 0,$ (3″)

also unhomogen

$$(x_0{}^2 - C)\,x^2 + (y_0{}^2 - C)\,y^2 + 2 x_0 y_0\, x y - 2\varkappa\,(x x_0 + y y_0) + \varkappa(\varkappa + C) = 0, \quad (3''')$$

wo die Konstante $C = \tau\, b = \tau\,(x_0{}^2 + y_0{}^2 - \varkappa\, s_0{}^2)$ (5)
ist.

1. In der hyperbolischen Geometrie wird also die Gleichung des Kreises um den (eigentlichen oder uneigentlichen) Mittelpunkt $M = (x_0, y_0, s_0)$ mit dem Radius ϱ durch die Gleichung (3″) gegeben.

2. Ist der Koordinatenanfangspunkt R der Mittelpunkt M, so lautet die Gleichung eines solchen Kreises in unhomogenen Koordinaten

$$x^2 + y^2 = C_0{}^2, \quad (6)$$

wo die Konstante $C_0 = \sqrt{\frac{\varkappa(\tau - 1)}{\tau}} = \sqrt{\varkappa}\,\frac{e^{\frac{\varrho}{\mu}} - e^{-\frac{\varrho}{\mu}}}{e^{\frac{\varrho}{\mu}} + e^{-\frac{\varrho}{\mu}}} = \sqrt{\varkappa}\,\mathrm{tgh}\,\frac{\varrho}{\mu}$ (7)

ist. Die Tangenten in den Schnittpunkten eines solchen Kreises mit der x- bzw. y-Achse gehen durch den Eckpunkt Q bzw. P des Fundamentaldreiecks. Die Gerade PQ ist Polare von M für den Kreis und den absoluten Kegelschnitt.

Natürlich gelten auch hier analog die Sätze 2 S. 134 und 4 S. 134.

3. Für $\varrho = 0$ ($\tau = 1$) oder auch $\varrho = \mu \pi i = \lambda$, wo λ nach den Sätzen 2 S. 99 und 6 S. 101 die Maßzahl der Gesamtlänge der Geraden ist, zerfällt der Kreis in die reellen oder konjugiert-imaginären Tangenten vom Mittelpunkt M an den absoluten Kegelschnitt.

Denn die Gleichung (3″) zerfällt dann in die beiden unhomogen geschriebenen Gleichungen

$$\begin{aligned}(y - y_0) - \alpha_1\,(x - x_0) &= 0,\\ (y - y_0) - \alpha_2\,(x - x_0) &= 0,\end{aligned} \quad (8\,a,\ b)$$

wo
$$\alpha_{1,2} = \frac{y_0 \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 - \varkappa} + x_0}{x_0 \sqrt{x_0{}^2 + y_0{}^2 - \varkappa} - y_0} \quad (9)$$

ist und der Wurzel das doppelte Vorzeichen zu geben ist. (Liegt der Mittelpunkt M *auf* dem absoluten Kegelschnitt, d. h. ist $x_0{}^2 + y_0{}^2 - \varkappa = 0$, so ist $\alpha_{1,2} = -\frac{x_0}{y_0}$, und der Kreis zerfällt jetzt in die doppelt zählende Tangente $x x_0 + y y_0 - \varkappa = 0$ des Punktes (x_0, y_0).)

Daß diese Geraden (8a, b) aber auch Tangenten an den absoluten Kegelschnitt sind, ist leicht direkt zu beweisen; es folgt dies im übrigen aus dem allgemeinen Satze (entsprechend dem Satze 7 S. 135 der elliptischen Geometrie):

4. Jeder Kreis berührt den absoluten Kegelschnitt in dessen Schnittpunkten mit der Polaren des Kreismittelpunktes M.

Denn die Schnittpunkte des Kreises (3″) und des absoluten Kegelschnittes $x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$ sind auch durch die beiden Gleichungen bestimmt

$$x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$$

und

$$x x_0 + y y_0 - \varkappa s s_0 = 0,$$

wobei die letzte Gleichung doppelt zählt und ja die Polare des Punktes (x_0, y_0, s_0) darstellt.

Endlich gelten auch hier die Sätze 9 und 10 der S. 136. Denn die Gleichung der Polaren eines beliebigen Punktes (x_1, y_1, s_1) bezüglich des Kreises mit der Gleichung (3‴) lautet

$$(x_0^2 - C) x_1 x + (y_0^2 - C) y_1 y + x_0 y_0 (x_1 y + y_1 x) \\ - x_0 \varkappa (x + x_1) - y_0 \varkappa (y + y_1) + \varkappa(\varkappa + C) = 0.$$

Ihre Koordinaten sind also

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (x_0^2 - C) x_1 + x_0 y_0 y_1 - \varkappa x_0, \\ v_1 &= (y_0^2 - C) y_1 + x_0 y_0 x_1 - \varkappa y_0, \\ t_1 &= - \varkappa x_0 x_1 - \varkappa y_0 y_1 + \varkappa(\varkappa + C). \end{aligned}\right\} \qquad (10\,\text{a, b, c})$$

Die Durchmessergerade des Punktes (x_1, y_1, s_1) andererseits hat die Gleichung

$$x (y_1 - y_0) - y (x_1 - x_0) + (x_1 y_0 - y_1 x_0) = 0$$

und demnach die Linienkoordinaten

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= y_1 - y_0, \\ v_2 &= - (x_1 - x_0), \\ t_2 &= x_1 y_0 - y_1 x_0. \end{aligned}\right\} \qquad (11\,\text{a, b, c})$$

Nach der Gleichung (13) und dem Satze 8 S. 109 stehen nun die beiden Geraden aufeinander senkrecht, wenn die Gleichung $u_1 u_2 + v_1 v_2 - \frac{1}{\varkappa} t_1 t_2 = 0$ erfüllt ist. Dies ist hier der Fall. —

Jetzt aber ist es Zeit, nacheinander die *drei Fälle* genauer zu betrachten, daß der Mittelpunkt des Kreises im Innern bzw. im Äußern des absoluten Kegelschnittes oder auf ihm gelegen ist, und dabei uns eine anschauliche Vorstellung der Kreise zu schaffen.

1. Fall: *Der Punkt* $M = (x_0, y_0, s_0)$ *liege im Innern des absoluten Kegelschnittes (Kreise erster Art)*. Es ist dann

$$x_0^2 + y_0^2 - \varkappa\, s_0^2 < 0.$$

(Wenn wir wollen, können wir wieder den Mittelpunkt M als den Anfangspunkt R unseres Koordinatensystems wählen, also $x_0 = y_0 = 0$ setzen.)

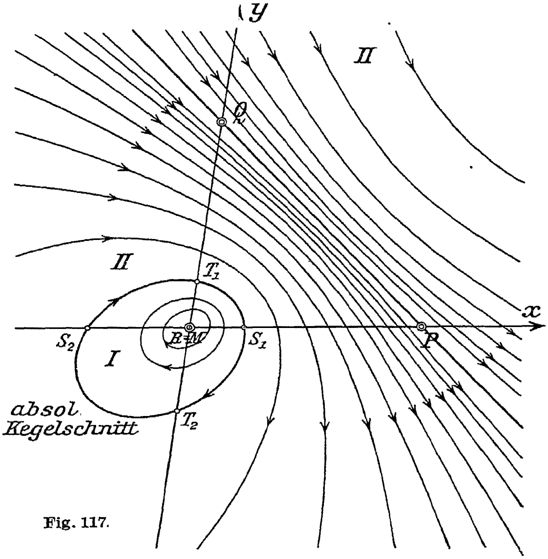


Fig. 117.

Für *reelle* Werte des Radius ϱ gilt gemäß der Gleichung (4), die auch $\frac{d\varrho}{d\tau} > 0$ ergibt, die Tabelle:

$\varrho = 0$	$\tau = 1$
$0 < \varrho < +\infty$	$1 < \tau < +\infty$
$\varrho = +\infty$	$\tau = +\infty.$

Für $\varrho = \infty$ ergibt die Gleichung (3″) $x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0$, d. h. die Gleichung des absoluten Kegelschnittes selbst.

Für $\varrho = 0$ besteht der Kreis aus dem Mittelpunkt M allein (abgesehen von den imaginären Punkten, vgl. den Satz 3). Nimmt ϱ zu, so haben wir zunächst sehr kleine Kegelschnitte um M, die bei weiterem Zunehmen von ϱ sich dem absoluten Kegelschnitte selbst nähern (Fig. 117, *Gebiet I;* in ihr ist wie auch in den folgenden Figuren der absolute Kegelschnitt stark ausgezeichnet).

Die Punkte außerhalb des absoluten Kegelschnittes haben nun nach dem Satze 7 S. 102 vom Punkte M eine Entfernung $\varrho = \frac{\mu}{2}(\sigma_1 + \pi i)$, wo $+\infty > \sigma_1 \geqq 0$ gilt. Es ist also gemäß der Gleichung (4)

$$\tau = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{\sigma_1}{2}} - e^{-\frac{\sigma_1}{2}}\right)^2. \tag{4'}$$

Also gilt jetzt, da noch $\frac{d\tau}{d\sigma_1} < 0$ ist, die Tabelle:

$\sigma_1 = \infty$	$\tau = \infty$
$+\infty > \sigma_1 > 0$	$-\infty < \tau < 0$
$\sigma_1 = 0$	$\tau = 0.$

Für $\sigma_1 = 0$ $(\tau = 0)$ ergibt die Gleichung (3″)

$$(x x_0 + y y_0 - \varkappa\, s s_0)^2 = 0,$$

d. h. die doppelt zählende Polare des Mittelpunktes M für den absoluten Kegelschnitt.

Hiernach erhalten wir, wenn σ_1 von $+\infty$ bis 0 abnimmt, Kegelschnitte, die zunächst den absoluten Kegelschnitt einschließen und dann sich von beiden Seiten her der Polaren nähern (Fig. 117, *Gebiet II*).

2. Fall: *Der Punkt* $M = (x_0, y_0, s_0)$ *liege im Äußern des absoluten Kegelschnittes*, so daß $x_0^2 + y_0^2 - \varkappa s_0^2 > 0$ ist *(Kreise zweiter Art)*. (Wenn wir wollen, können wir dann den Mittelpunkt M als den Eckpunkt P des Fundamentaldreiecks wählen, also $(x_0, y_0, s_0) = (1, 0, 0)$ setzen. Die Gleichung (3″) geht dann in die einfachere Gleichung

$$x^2 - \cosh^2 \frac{\varrho}{\mu}\,(x^2 + y^2 - \varkappa) = 0 \tag{12}$$

über.) Wir wissen nach dem Satze 3, daß für $\varrho = 0$ sich die beiden reellen (d. h. reelle Gleichungen besitzenden) Tangenten von M an den absoluten Kegelschnitt ergeben.

Für Punkte im Innern des absoluten Kegelschnittes ist dann nach dem Satze 7 S. 102

$$\varrho = \frac{\mu}{2}\,(\sigma_2 + \pi i),$$

wo $0 \leqq \sigma_2 < +\infty$ gilt. Es ist also gemäß der Gleichung (4)

$$\tau = -\frac{1}{4}\left(e^{\frac{\sigma_2}{2}} - e^{-\frac{\sigma_2}{2}}\right)^2 \tag{4″}$$

und es gilt die Tabelle:

$\sigma_2 = 0$	$\tau = 0$
$0 < \sigma_2 < +\infty$	$0 > \tau > -\infty$
$\sigma_2 = \infty$	$\tau = \infty.$

Für $\sigma_2 = 0$ ergibt sich zunächst die doppelt zählende Polare von M (mit den Schnittpunkten T_1, T_2 auf dem absoluten Kegelschnitt). Wenn dann σ_2 zunimmt, so ergeben sich Kreise im Innern des absoluten Kegelschnittes, welche letzteren in den Punkten T_1, T_2 berühren und allmählich sich dem absoluten Kegelschnitte nähern (Fig. 118, *Gebiet I*).

Durch die beiden von M an den absoluten Kegelschnitt gelegten Tangenten zerfällt die projektive Ebene in *zwei Teile*. Für Punkte außerhalb des absoluten

Kegelschnittes, doch in demselben Teil, in dem der absolute Kegelschnitt liegt, gilt nach dem Satze 8 S. 103 für ihre Entfernung vom Punkte M

$$\varrho = \frac{\mu}{2}\,|\tau_1|$$

Es ist also gemäß der Gleichung (4)

$$= \frac{1}{4}\left(e^{\frac{|\tau_1|}{2}} + e^{-\frac{|\tau_1|}{2}}\right)^2 \qquad (4''')$$

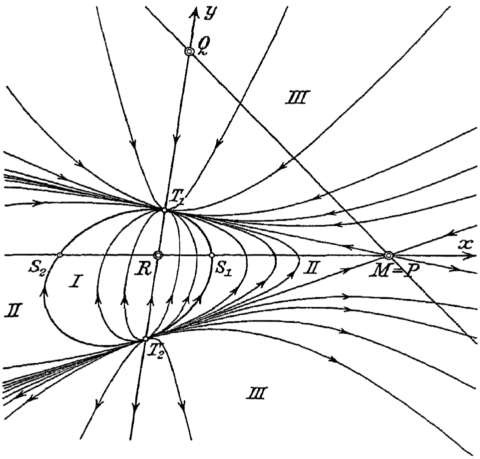


Fig. 118.

und wir erhalten die Tabelle:

$\lvert\tau_1\rvert = \infty$	$\tau = \infty$
$+\infty > \lvert\tau_1\rvert > 0$	$+\infty > \tau > 1$
$\lvert\tau_1\rvert = 0$	$\tau = 1.$

Wenn $|\tau_1|$ vom Werte $+\infty$ bis 0 abnimmt, so ergeben sich Kreise in dem genannten Teile der Ebene, welche den absoluten Kegelschnitt einschließen, ihn immer in den Punkten T_1, T_2 berühren, zunächst von dem absoluten Kegelschnitt sich loslösen und dann mehr und mehr den beiden von M ausgehenden Tangenten sich nähern (Fig. 118, *Gebiet II*).

Für Punkte außerhalb des absoluten Kegelschnittes, doch in dem anderen Teile der Ebene, gilt nach dem Satz 3 S. 100 für ihre Entfernung vom Punkte M

$$\varrho = \frac{\mu}{2}\,\vartheta_1 i, \qquad \text{wo } 0 < \vartheta_1 < \pi \text{ sei.}$$

Es ist also gemäß der Gleichung (4)

$$\tau = \cos^2 \frac{\vartheta_1}{2}, \qquad (4'''')$$

und wir erhalten die Tabelle $\left(\frac{d\tau}{d\vartheta_1} < 0\right)$:

$\vartheta_1 = 0$	$\tau = 1$
$0 < \vartheta_1 < \pi$	$1 > \tau > 0$
$\vartheta_1 = \pi$	$\tau = 0.$

Wenn ϑ_1 vom Werte 0 bis π zunimmt, so ergeben sich Kreise in dem genannten Teile der Ebene, welche sich von den beiden Tangenten des Punktes M loslösen und sich dann mehr und mehr von beiden Seiten der Polaren des Punktes M nähern (Fig. 118, *Gebiet III*).

3. Fall: *Der Punkt* $M = (x_0, y_0, s_0)$ *liege auf dem Kegelschnitt,* so daß $x_0^2 + y_0^2 - \varkappa s_0^2 = 0$ ist *(Kreise dritter Art oder Grenzkreise)*. (Wenn wir wollen, können wir dann den Punkt M im Punkte $(\sqrt{\varkappa}, 0, 1)$ der x-Achse wählen.) Es ist dann für alle von ∞ verschiedenen Werte τ nach der Gleichung (5) $C = 0$, und die Gleichung (3″) ergibt die doppelt zählende Tangente des Punktes M (vgl. die Betrachtungen der S. 105). Wenn aber $\tau = \infty$ ist, so ist der Wert für C nach der Gleichung (5) unbestimmt. Wir wollen nun einmal als Beispiel einen bestimmten Grenzübergang machen, bei dem der Mittelpunkt des Kreises ins Unendliche, d. h. auf den absoluten Kegelschnitt rückt. Es sei zunächst $(x_0, y_0, s_0) = (x_0, 0, 1)$, wo $0 < x_0 < \sqrt{\varkappa}$ sei, also der Mittelpunkt M ein auf der Strecke RS_1 gelegener Punkt ist (Fig. 119). Um M sei der Kreis gelegt, der durch den Koordinatenanfangspunkt (0, 0, 1) geht. Die Gleichung des Kreises ist dann gemäß der Gleichung (3″)

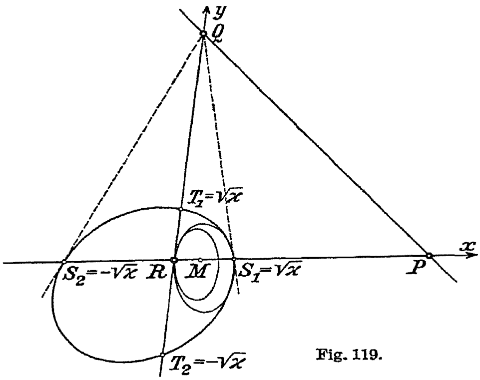


Fig. 119.

$$(x x_0 - \varkappa)^2 - C(x^2 + y^2 - \varkappa) = 0, \quad (13)$$

wo
$$C = \cosh^2 \frac{\varrho}{\mu} (x_0^2 - \varkappa) \quad (14)$$

oder
$$C = -\varkappa \quad (14')$$

ist. (Denn die Gleichung (13) ist ja für $x = y = 0$ erfüllt.) Lassen wir jetzt den Punkt M in den Punkt S_1 hineinrücken, d. h. ist $\lim x_0 = \sqrt{\varkappa}$ und $\lim \varrho = \infty$, so werden die beiden Faktoren der rechten Seite der Gleichung (14) zwar ∞ und 0, doch ist $\lim C = -\varkappa$, weil C ja schon vor dem Grenzübergang diesen Wert besitzt. In der Grenze ergibt sich also der Kreis mit der Gleichung

$$2x^2 + y^2 = 2\sqrt{\varkappa} \cdot x, \quad (15)$$

d. h. der Kreis mit dem unendlich fernen Punkt $S_1 = (\sqrt{\varkappa}, 0, 1)$ als Mittelpunkt durch den Koordinatenanfangspunkt. (Für $\lim \varkappa = \infty$, d. h. für die euklidische Geometrie, geht die Gleichung (15) über in die Gleichungen $x = 0$ und $s = 0$.)

Wir sind somit dazu geführt, nun die Gleichung (3″) für den Fall zu diskutieren, daß $x_0^2 + y_0^2 - \varkappa s_0^2 = 0$, doch die Größe C eine positive oder nega-

tive Konstante ist. Diese Kreise werden eben als *Grenzkreise* (oder Horozyklen) bezeichnet. Jeder Grenzkreis ist also die Grenzlage von allgemeinen Kreisen, wenn eben der Mittelpunkt auf den absoluten Kegelschnitt rückt und zugleich der Radius so unendlich wird, daß $C = \tau\,(x_0^2 + y_0^2 - \varkappa\, s_0^2)$ einen bestimmten reellen Grenzwert hat. Zunächst ergibt sich als Grenzfall des Satzes 4:

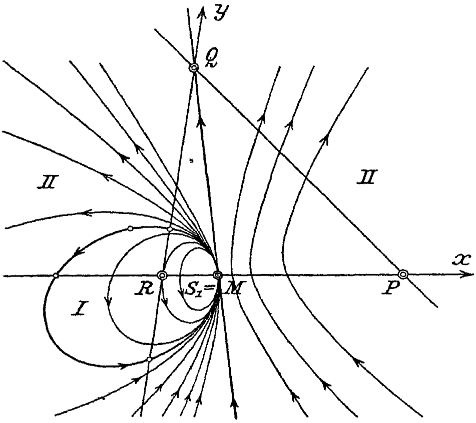


Fig. 120.

5. Jeder Grenzkreis berührt den absoluten Kegelschnitt an der Stelle (x_0, y_0, s_0) vierpunktig.

(Wenn wir wollen, können wir nun den Punkt (x_0, y_0, s_0) speziell als den Punkt $(\sqrt{\varkappa}, 0, 1)$ wählen.)

Für $C = \infty$ ergibt ja die Gleichung (3″) den absoluten Kegelschnitt selbst.

Für die Werte $0 > C > -\infty$ können die reellen Punkte der Gleichung (3″) nur *innere* Punkte des absoluten Kegelschnittes, für die Werte $0 < C < +\infty$ nur *äußere* Punkte sein. Wenn also für denselben Mittelpunkt (x_0, y_0, s_0) die Größe C von $-\infty$ bis 0 zunimmt, so erhalten wir als Grenzkreise Kegelschnitte im Innern des absoluten Kegelschnittes, welche sich von diesem ablösen und sich allmählich auf den Punkt M zusammenziehen, in der Grenze aber die doppelte Tangente von M ergeben (Fig. 120, *Gebiet I*). Wenn aber C von $+\infty$ bis 0 abnimmt, so erhalten wir als Grenzkreise Kegelschnitte im Äußern des absoluten Kegelschnittes, welche sich wieder von diesem ablösen und sich von beiden Seiten der Tangente des Punktes M nähern (Fig. 120, *Gebiet II*).

6. Jeder einzelne Grenzkreis ist eine orthogonale Trajektorie des Parallelstrahlenbüschels durch den Punkt M (vgl. den Beweis S. 139).

Der Kreis (15) z. B. ist die vom Koordinatenanfangspunkt ausgehende orthogonale Trajektorie des Parallelstrahlenbüschels mit dem Träger $S_1 = (\sqrt{\varkappa}, 0, 1)$.

Es ist auch leicht den Satz zu zeigen:

7. Jede durch den Punkt S_1 des absoluten Kegelschnittes gehende Gerade hat denselben Pol für den absoluten Kegelschnitt und jeden Grenzkreis mit dem Mittelpunkt $M = S_1$.

Es folgt dieser Satz ja einfach daraus, daß eine solche Gerade auf dem Grenzkreis senkrecht steht. (In der Figur 119 gehen also die Tangenten in den Punkten S_1, S_2, R für beide Kurven durch denselben Punkt Q.) Hieraus folgt dann auch leicht die Konstruktion der Grenzkreise mit gegebenem Mittelpunkt. Es ist z. B. für den Grenzkreis mit dem Mittelpunkt $M = S_1$ der x-Achse durch den Anfangspunkt R (Fig. 121) der zweite Schnittpunkt H einer beliebigen Transversalen durch R mit dem Grenzkreis leicht zu konstruieren als vierter harmonischer Punkt zu den Punkten J, L und R, wo J und L die Schnittpunkte der Transversalen mit S_1Q und mit der Polaren S_1K von J für den absoluten Kegelschnitt sind. (Die Tangente des Grenzkreises im Punkte H geht auch durch den Schnittpunkt N der Tangente RQ mit der Polaren S_1O von J hindurch.) —

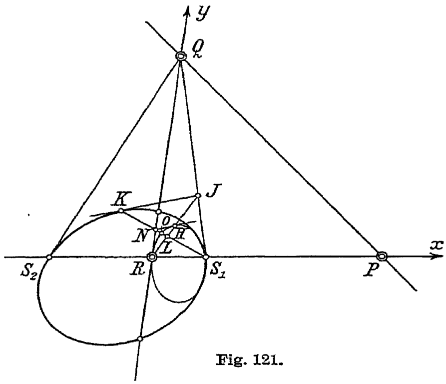


Fig. 121.

Jedes der von uns betrachteten drei konzentrischen Kreisbüschel (d. h. die Gesamtheit aller Kreise mit demselben Mittelpunkt M) überdeckt ersichtlich die Ebene gerade einmal. Es gilt ebenfalls auch in der hyperbolischen Geometrie der sinngemäß hier übertragene Satz 8 S. 136.

Es interessieren natürlich in der hyperbolischen Geometrie vor allem die Kreise, die innerhalb des absoluten Kegelschnittes verlaufen (eigentliche Kreise). Zusammenfassend können wir demgemäß noch hervorheben:

8. Es gibt drei Arten eigentlicher Kreise, nämlich solche mit endlich fernem, überunendlich fernem bzw. unendlich fernem Mittelpunkt M.

§ 28. Folgerungen aus der bisher entwickelten Theorie der Kreise in der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie.

Wir wollen noch einen Blick auf den Grenzübergang zur euklidischen Geometrie werfen, die sich ja für $\lim \varkappa = \infty$ ergibt. Schon auf S. 143 haben wir gesehen, was dann aus einem Grenzkreis wird (vgl. auch Satz 4 S. 134). Wir wollen aber nun auch betrachten, was aus einem Kreis mit überunendlich fernem Mittelpunkt wird. Wir gehen z. B. aus von dem Kreis der *hyperbolischen* Geometrie, dessen Mittelpunkt $M = (x_0, y_0, s_0)$ der Eckpunkt $P = (1, 0, 0)$ des Fundamentaldreiecks ist und der durch den Punkt $(1, 0, 1) = E_1$ hindurchgeht (Fig. 122). Sein Radius ist dann nach der Gleichung (3) S. 137

$$\varrho = \frac{\mu}{2} \log \frac{1 - \sqrt{\varkappa}}{1 + \sqrt{\varkappa}} = -1 + \frac{\mu}{2} \pi i.$$

Seine Gleichung ist also nach der Gleichung (3″) S. 138

$$x^2 - C\,(x^2 + y^2 - \varkappa s^2) = 0, \tag{1}$$

wo

$$C = \tau\, b = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{\varrho}{\mu}} + e^{-\frac{\varrho}{\mu}}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{-\frac{2}{\mu}} + e^{\frac{2}{\mu}} - 2\right)$$

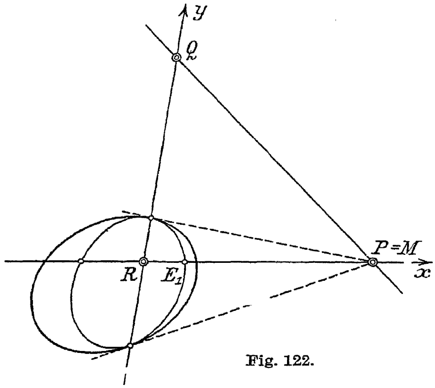


Fig. 122.

oder, da gemäß der Gleichung (10) S. 95

$$e^{\frac{2}{\mu}} = \frac{\sqrt{\varkappa} + 1}{\sqrt{\varkappa} - 1} \quad \text{ist,}$$

$$C = \frac{1}{1 - \varkappa}. \tag{2}$$

(Dieser Wert ergibt sich natürlich auch aus der Gleichung (1) für $(x, y, s) = (1, 0, 1)$.)

Lassen wir jetzt $\varkappa$ gegen ∞ konvergieren, so geht die Gleichung (1) über in die Gleichung

$$x^2 - s^2 = 0$$

oder

$$x \pm s = 0. \tag{1'}$$

Es ergeben sich also in der euklidischen Ebene bei dem Grenzübergang aus dem Kreise der hyperbolischen Ebene die beiden Parallelgeraden zur y-Achse im Abstande 1. Mit anderen Worten:

1. Auch in der euklidischen Ebene haben wir drei Arten von Kreisen, nämlich die gewöhnlichen Kreise (mit endlich fernem Mittelpunkt), dann die in eine Gerade und die unendlich ferne Gerade zerfallenden Kreise mit unendlich fernem Mittelpunkt in der zur Geraden senkrechten Richtung und die in ein Paar von Parallelgeraden zerfallenden Kreise mit unendlich fernem Mittelpunkt in der zu den Geraden senkrechten Richtung.

Diese Parallelgeraden sind auch die äquidistanten Geraden zu ihrer Mittelgeraden.

Diese letzte Bemerkung führt uns zu der folgenden weiteren Betrachtung: Wir können natürlich nun auch die Kreise der *elliptischen* Geometrie wie folgt deuten:

2. Der einzelne Kreis ist zugleich die äquidistante Kurve zu der Polaren seines Mittelpunktes.

Es ist ja z. B. in der Fig. 123 $AB \perp CC_1$ und $A_1B_1 \perp CC_1$, wo CC_1 die Polare von M ist, und $AC = BC$ und $A_1C_1 = B_1C_1$.

Das gleiche gilt natürlich in der *hyperbolischen* Geometrie für die Kreise mit überunendlich fernem Mittelpunkt M bezüglich der ebenfalls eine eigentliche Gerade darstellenden Polaren von M (Fig. 124).

Wir erkennen aber weiter:

3. *In der elliptischen Geometrie ist die Äquidistante gegen die Polare von M konvex, in der hyperbolischen Geometrie konkav gekrümmt,* d. h. ziehen wir noch die Verbindungslinie AA_1 in den Fig. 123 und 124 und betrachten wir das gewöhnliche Viereck AA_1C_1C, wobei dann also im Falle der elliptischen Geometrie die Seite AA_1 des Vierecks die Seite CC_1 nicht schneidet, so liegt der zugehörige Bogen AA_1 der Äquidistanten in der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie *innerhalb* bzw. außerhalb der Vierecksfläche. Diese Tatsache entspricht durchaus der anderen, daß die Winkelsumme in dem Viereck stets größer bzw. kleiner als 2π ist.

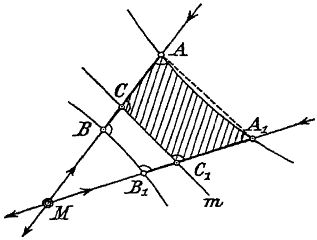


Fig. 123.

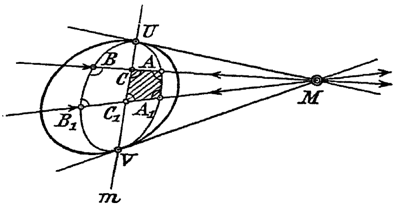


Fig. 124.

Das Viereck AA_1C_1C hat ja die Eigenschaft, daß $\sphericalangle C = \sphericalangle C_1 = \frac{\pi}{2}$ und $AC = A_1C_1$ ist. Mit unserer Betrachtung haben wir daher innige Beziehung zu den Untersuchungen des Pater Gerolamo Saccheri (1667—1733) und seines wissenschaftlichen Nachfolgers I. H. Lambert (1728—1777) gewonnen, die auch an das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck anknüpfen. Saccheri spricht von der Hypothese (dem Axiom) des rechten, der Hypothese des spitzen und der Hypothese des stumpfen Winkels, je nachdem eben die einander gleichen Winkel an den Ecken A, A_1 rechte, spitze oder stumpfe sind. Saccheri beweist dann z. B. den Satz:

Je nachdem die Hypothese des rechten, stumpfen oder spitzen Winkels gilt, ist die Winkelsumme in jedem Dreieck bzw. gleich, größer oder kleiner als zwei Rechte.

Weiterhin kommt dann Saccheri durch Scheinbeweise zu dem Ergebnis, daß weder die Hypothese des stumpfen noch die des spitzen Winkels richtig sein kann. An Saccheri und Lambert schließen dann die Untersuchungen von A. M. Legendre (1752—1833) über die Winkelsumme im Dreieck an, die wir schon S. 129 in der Anm. erwähnt haben.[1])

Es sei noch hervorgehoben, daß wir selbst an Stelle der Hypothesen (Axiome) für das zweirechtwinklige gleichschenklige Viereck die gleichwertigen Axiome

1) Wegen der Untersuchungen dieser „Vorläufer der nichteuklidischen Geometrie" sei auf die interessante Darstellung in dem Buche: R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, deutsche Ausgabe von H. Liebmann, Leipzig 1908, S. 24—66 verwiesen.

für das Viereck RE_1EE_2 der Fig. 52 S. 38 und der Fig. 65 S. 52, in dem $RE_1 = RE_2$ und $\sphericalangle R = \sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2 = \frac{\pi}{2}$ ist, aufgestellt haben (vgl. auch die Sätze 6 S. 40 und 9 S. 40, sowie die Sätze 2 S. 52 und 4 S. 53).

Wir wollen aber auch noch die Beziehung der letzten Betrachtungen zur Behandlung der *hyperbolischen* Geometrie in manchen unserer Zeit angehörenden Lehrbüchern besprechen. Diese führen nämlich ein Koordinatensystem für die eigentlichen Punkte ein, das wir hier leicht deuten können. Es sei eine beliebige Gerade (mit den unendlich fernen Punkten U, V), auf ihr der Koordinatenanfangspunkt O und eine von ihm ausgehende positive Richtung der Geraden, sowie eine positive Seite der Umgebung von O angenommen (Fig. 125). Von einem beliebigen Punkt P sei dann das Lot PQ auf die Gerade gefällt mit dem Fußpunkt Q. *Als „metrische" Koordinaten des Punktes P, die wir hier vorübergehend auch mit ξ, η bezeichnen wollen, sollen dann die beiden, mit Vorzeichen versehenen Strecken*

$$OQ = \xi \quad \textit{und} \quad QP = \eta \quad \textit{gelten.}$$[1]

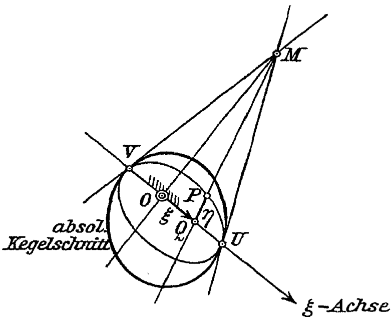


Fig. 125.

Wir sehen dann sofort von unserem Standpunkt aus: Die Kurven $\xi =$ konst. sind die Geraden durch den absoluten Pol M der gegebenen Geraden, der ξ-Achse, und die Kurven $\eta =$ konst. sind die Äquidistanten der ξ-Achse, d. h. die Kreisbogen um M.

So einfach diese Koordinaten auf den ersten Blick erscheinen mögen, so haben sie jedenfalls den Nachteil, daß z. B. die Geraden nicht durch eine lineare Gleichung festgelegt werden. Doch gilt hier ersichtlich der Satz:

4. Die eigentlichen Punkte und die neuen endlichen reellen (ξ, η)-Koordinaten sind einander eineindeutig zugeordnet.

Es erfordert eine einfache Rechnung, um die *Transformationsformeln zwischen unseren projektiven Koordinaten x, y und diesen metrischen Koordinaten ξ, η* aufzustellen. Es seien die Geraden OU und OM zugleich die (x, y)-Achsen unseres projektiven Koordinatensystems. Der Punkt Q der Figur 125 hat also die Koordinaten $(x_1, y_1, s_1) = (x, 0, 1)$ und der Punkt P die Koordinaten $(x_2, y_2, s_2) = (x, y, 1)$. Es ist also nach der Formel (17) S. 98

---

1) Vgl. z. B. R. Baldus, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1927, S. 49ff. und S. 121ff. Eine Gerade wird dann durch die Gleichung

$$a \sinh \xi + b \operatorname{tangh} \eta + c \cosh \xi = 0$$

gegeben (S. 123 daselbst).

$$\left.\begin{aligned}\xi &= OQ = \frac{\mu}{2}\log\frac{\sqrt{\varkappa}+x}{\sqrt{\varkappa}-x},\\ \eta &= QP = \frac{\mu}{2}\log\frac{\sqrt{\varkappa-x^2}+y}{}\end{aligned}\right\} \qquad (3\,\mathrm{a},\ \mathrm{b})$$

Also ist
$$e^{\frac{2\xi}{\mu}} = \frac{\sqrt{\varkappa}+x}{\sqrt{\varkappa}-x}$$

oder
$$\operatorname{tgh}\frac{\xi}{\mu} = \frac{e^{\frac{\xi}{\mu}} - e^{-\frac{\xi}{\mu}}}{e^{\frac{\xi}{\mu}} + e^{-\frac{\xi}{\mu}}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,x \qquad (4\,\mathrm{a})$$

und
$$e^{\frac{2\eta}{\mu}} = \frac{\sqrt{\varkappa-x^2}+y}{\sqrt{\varkappa-x^2}-y}$$

oder
$$\operatorname{tgh}\frac{\eta}{\mu} = \frac{y}{\sqrt{\varkappa-x^2}} \qquad (4\,\mathrm{b})$$

Aus den Gleichungen (4a, b) folgt dann weiter, da ja $\operatorname{tgh}\alpha = \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha}$ und $\cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha = 1$ ist,

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\varkappa}\operatorname{tgh}\frac{\xi}{\mu},\\ y &= \sqrt{\varkappa}\,\frac{\operatorname{tgh}\frac{\eta}{\mu}}{\cosh\frac{\xi}{\mu}}.\end{aligned}\right\} \qquad (5\,\mathrm{a},\ \mathrm{b})$$

Um diese Formeln noch zu vereinfachen, wollen wir das neue projektive (X, Y)-Koordinatensystem eingeführt denken, das wir bereits S. 54 betrachtet haben. Ferner wollen wir jetzt noch als metrische Einheitsstrecke die Strecke der x- oder X-Achse vom Anfangspunkt bis zum Punkte

$$x_0 = X_0\sqrt{\varkappa} = \sqrt{\varkappa}\ \operatorname{tgh} 1 = \sqrt{\varkappa}\,\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}} = \sqrt{\varkappa}\cdot 0{,}9588\ldots$$

wählen (vgl. die Gleichung (16′) S. 117). Dann wird die Größe $\mu = 1$ (gemäß der Gleichung (3a)) und an die Stelle der Gleichungen (5a, b) treten die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} X &= \operatorname{tgh}\xi,\\ Y &= \frac{\operatorname{tgh}\eta}{\cosh\xi}.\end{aligned}\right\} \qquad (6\,\mathrm{a},\ \mathrm{b})$$

Die Gleichung der Geraden $aX + bY + c = 0$ (7)

geht dann über in die Gleichung

$$a\sinh\xi + b\operatorname{tgh}\eta + c\cosh\xi = 0.^{1)} \qquad (8)$$

1) Vgl. die Anm. der vorigen Seite.

Es ist für uns nun auch ein leichtes, das (x', y', p')-Koordinatensystem, das Weierstraß für die Behandlung der ebenen hyperbolischen Geometrie eingeführt hat und das seitdem von manchen Autoren benutzt wurde, aus den vorstehenden Betrachtungen abzuleiten.[1]) Diese neuen Koordinaten sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \cosh\eta \sinh\xi, \\ y' &= \sinh\eta, \\ p' &= \cosh\eta \cosh\xi, \end{aligned}\right\} \qquad (9\,\text{a, b, c})$$

für welche die Gleichung

$$-x'^2 - y'^2 + p'^2 = 1 \qquad (10)$$

gilt. Wir können diese letzte Bedingung auch fortlassen, wenn wir statt dessen die Koordinaten x', y', p' als homogene Koordinaten ansehen und statt der Gleichungen (9a, b, c) dann die folgenden benutzen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho\, x' &= \cosh\eta \sinh\xi, \\ \varrho\, y' &= \sinh\eta, \\ \varrho\, p' &= \cosh\xi \cosh\eta \end{aligned}\right\} \qquad (9'\,\text{a, b, c})$$

oder, unhomogen geschrieben,

$$\left.\begin{aligned} x' &= \operatorname{tgh}\xi, \\ y' &= \frac{\operatorname{tgh}\eta}{\cosh\xi}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Wir erkennen dann sogleich durch einen Blick auf die Gleichungen (6a, b):

5. *Die Weierstraßschen Koordinaten (x', y', p') sind im wesentlichen nichts anderes als unsere projektiven (X, Y)-Koordinaten mit unserer Wahl der metrischen Einheit.*

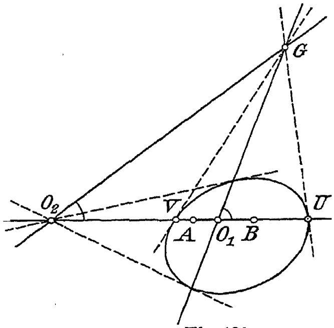


Fig. 126.

Wir haben damit natürlich auch eine *anschauliche* Vorstellung von den Weierstraßschen Koordinaten gewonnen. —

Wir wollen nun einmal in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie das Büschel der Kreise betrachten, die durch dieselben beiden (eigentlichen) Punkte A, B hindurchgehen. Vorweg sei an folgendes erinnert: *Es gibt zu zwei Punkten A, B stets zwei Mittelsenkrechten als geometrischer Ort der Punkte, die von den beiden Punkten gleich weit entfernt sind,* weil ja zwei Punkte auf der Verbindungsgeraden g zwei Strecken begrenzen. Die einzelne Mittelsenkrechte

1) Vgl. wegen dieser Weierstraßschen Koordinaten z. B. H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig 1905, S. 166 ff. (wo indes andere Koordinatenbezeichnungen gelten, wie ich, um Verwirrungen zu vermeiden, hervorhebe).

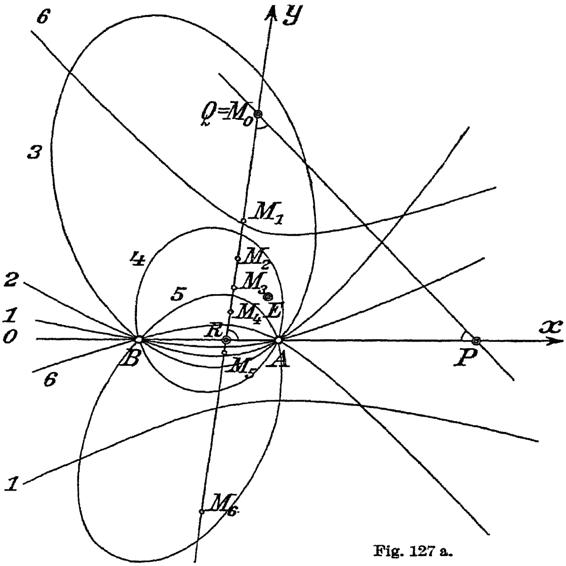


Fig. 127 a.

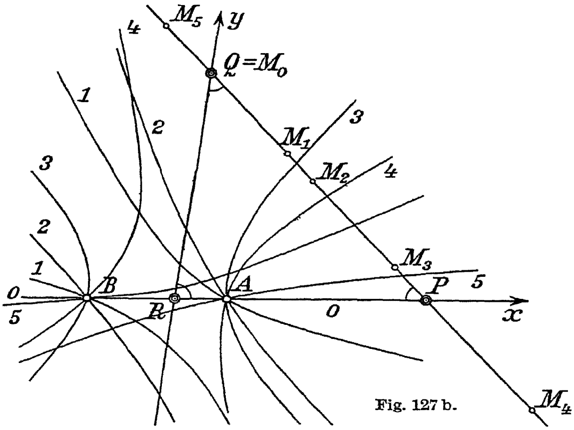


Fig. 127 b.

geht stets durch den Pol G der Geraden g. Ferner sind die Fußpunkte O_1, O_2 der beiden Mittelsenkrechten die gemeinsamen harmonischen Punkte zu den Punkten A, B und zu den beiden Schnittpunkten U, V der Geraden g mit dem absoluten Kegelschnitt. Beispielsweise sind in der Fig. 126 der *hyperbolischen* Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt die Geraden O_1G und O_2G die beiden Mittelsenkrechten der Punkte A, B; in der hyperbolischen Geometrie ist stets nur eine der beiden Mittelsenkrechten eine eigentliche Gerade.

In der *elliptischen* Geometrie besteht also das Büschel der Kreise durch die Punkte A, B aus zwei Teilen, je nachdem der Mittelpunkt des einzelnen Kreises auf der einen oder anderen Mittelsenkrechten liegt. Diese beiden Teile hängen nur in dem einen Kreise gleichsam aneinander, dessen Mittelpunkt der Pol G der Geraden g ist und der also aus der doppelten Geraden g besteht. Um diese Verhältnisse anschaulich zu überblicken, wollen wir die beiden Punkte A, B so auf der x-Achse gelegen annehmen, daß der Koordinatenanfangspunkt die Mitte der einen Strecke AB ist. (Durch Bewegung der Ebene können wir ja stets die Punkte A, B in diese Lage bringen.) Die beiden Mittelsenkrechten sind dann die Geraden RQ und PQ. (Die Fig. 127a, b veranschaulichen die beiden Teile des Kreisbüschels; in der Figur 127a ist auch

der Einheitspunkt E für das Fundamentaldreieck PQR des projektiven Koordinatensystems hinzugefügt. Die Weltkonstante $-\varkappa$ ist gleich $-1{,}75$ gewählt.)

In der *hyperbolischen* Geometrie zerfällt das Büschel der Kreise durch die beiden eigentlichen Punkte A, B analog auch in zwei Teile. (Die Fig. 128a, b

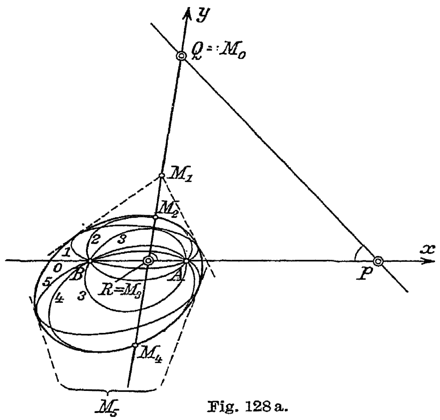


Fig. 128 a.

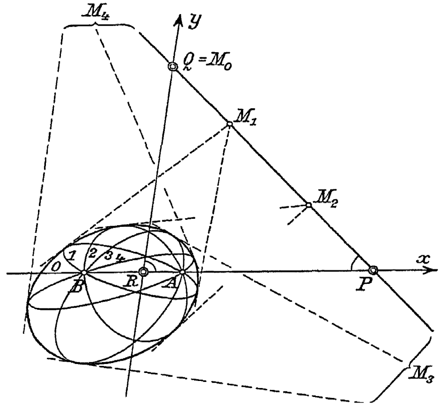


Fig. 128 b.

veranschaulichen die beiden Teile wieder für die Annahme, daß der Koordinatenanfangspunkt R die Mitte der einen auf der x-Achse gelegenen Strecke AB ist.) Im einzelnen brauchen wir diese Verhältnisse nicht auszuführen; es sei nur noch bemerkt, daß bei den Kreisen mit überunendlich fernem Mittelpunkt in dem einen Teil des Kreisbüschels die Punkte A, B auf *derselben*, im anderen Teil auf *verschiedenen* Hälften liegen.

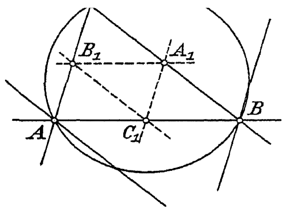


Fig. 129.

Auf die analogen Verhältnisse in der *euklidischen* Geometrie auf Grund des Satzes 1 S. 146 wollen wir nur hinweisen.

Wir wollen nun weiter die Frage aufwerfen, *ob denn ein Kreis durch drei (eigentliche) Punkte eindeutig bestimmt ist.* Schon in der *euklidischen* Geometrie lassen sich einschließlich der ausgearteten Kreise vier Kreise durch die Punkte A, B, C legen, nämlich außer dem gewöhnlichen Kreise noch die Paare von Parallelen, die als Äquidistanten zu den drei Mittellinien A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 sich ergeben (Fig. 129).

Auch in den beiden anderen Geometrien gilt der Satz:

6. In der elliptischen und hyperbolischen Geometrie gehen durch drei eigentliche Punkte stets vier Kreise k_i. In der hyperbolischen Geometrie haben

überdies drei Kreise von diesen einen überunendlich fernen Mittelpunkt, während der vierte einen endlich fernen, unendlich fernen oder überunendlich fernen Mittelpunkt haben kann.

Sind die drei eigentlichen (nicht auf einer Geraden gelegenen) Punkte A, B, C gegeben, so können wir sie ja durch drei Geraden verbinden. Es gibt nun zu *jeder* Geraden *zwei* Mittelsenkrechten der beiden zugehörigen Punkte als geometrischer Ort aller Punkte, die von den gegebenen beiden Punkten gleich weit entfernt sind. Es genügt weiterhin, allein die beiden Paare von Mittelsenkrechten für die Punktepaare A, B und A, C zu betrachten. Die Mittelsenkrechten des einen Paares schneiden nun die Mittelsenkrechten des anderen in vier verschiedenen Punkten, den Mittelpunkten der vier gesuchten Kreise. In der *hyperbolischen* Geometrie besteht jedes Paar Mittelsenkrechten aus einer eigentlichen und einer überunendlich fernen Geraden, eine Tatsache, der dann der Zusatz des Satzes 6 entspricht.

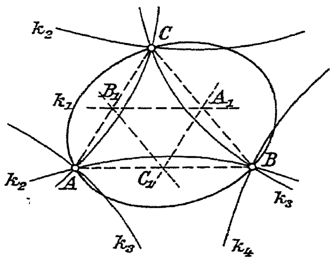


Fig. 130.

In den Fig. 130 und 131 sind für die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie die vier Kreise k_i durch die Punkte A, B, C gegeben. Von diesen vier Kreisen der Fig. 131 ist einer der Kreise hier ein Kreis 1. Art, während die drei anderen Kreise 3. Art sind. Die letzteren sind die Äquidistanten zu den drei Mittellinien des Dreiecks ABC. Analoges gilt für die Fig. 130. Allgemein gelten in den beiden nichteuklidischen Geometrien die zu dem Vorstehenden in engster Beziehung stehenden Sätze:

7. *Für die beiden durch zwei Punkte A, B bestimmten Strecken ist die Mitte der einen der absolute Pol zu der Mittelsenkrechten der anderen Strecke* (vgl. hier die Fig. 126 und die Betrachtungen der §§ 3—6).

8. *Die absolute Polare m des Mittelpunktes M eines Kreises geht stets durch die eine Mitte H einer beliebigen Sehne AB des Kreises* (Fig. 132). (Der Punkt H ist der absolute Pol der Senkrechten h von M auf die Sehne, und durch die Umwendung um h geht der

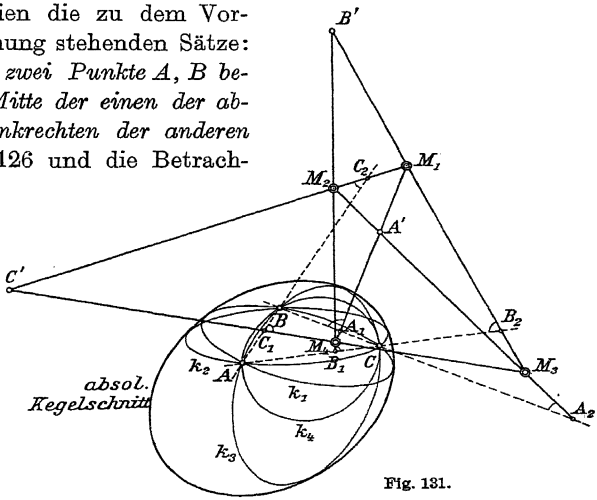


Fig. 131.

Kreis und der Punkt H in sich über, während die Punkte A, B sich vertauschen.)

9. Die durch einen beliebigen Punkt H der Polaren m für den Mittelpunkt M eines Kreises gelegten Strecken, deren Endpunkte auf dem Kreise liegen, werden durch den Punkt H halbiert (vgl. z. B. die Fig. 133 für die elliptische Geometrie.)

10. Die sechs Mittelsenkrechten der durch drei Punkte A, B, C bestimmten drei Streckenpaare gehen zu je dreien durch denselben Punkt, so daß sich insgesamt vier solcher Schnittpunkte der Mittelsenkrechten ergeben, eben die vier Mittelpunkte der den Punkten A, B, C umschriebenen Kreise.

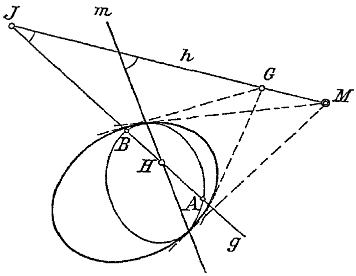


Fig. 132.

11. Die sechs Mittelpunkte der durch drei Punkte A, B, C bestimmten drei Streckenpaare liegen zu je dreien auf einer Geraden, so daß sich insgesamt vier solcher Geraden ergeben. (Es muß z. B. die Gerade B_1C_1 der Fig. 131 auch durch die Mitte A_2 der einen von den Punkten B, C bestimmten Strecke gehen.)

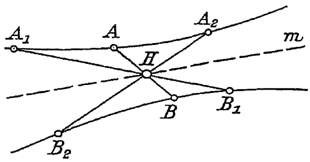


Fig. 133.

Endlich sei noch hinzugefügt, daß in den drei Geometrien sehr wohl durch vier Punkte auch drei Kreise gehen können. Wir brauchen nur etwa von vier zu den (x, y)-Achsen symmetrischen Punkten A, B, C, D auszugehen (Fig. 134 für die hyperbolische Geometrie).

Es mag dem Leser überlassen bleiben, die letzten Betrachtungen auch in das duale Gebiet zu übertragen, insbesondere also die Sätze über die Kreise zu studieren, welche drei gegebene Geraden berühren.

Wir wollen nun noch auf Grund der Kreistheorie die Bewegungen in der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie als weitere Grundlage für die *Kinematik* näher betrachten. Schon wiederholt haben wir ja die Bewegungen in den beiden Geometrien besprochen; wir brauchen nur zurückzublicken auf den ersten Abschnitt, insbesondere auf die Sätze 15 und 16 S. 21, auf den § 9 im zweiten Abschnitt und auf den dritten Abschnitt. Uns interessieren jetzt weiter besonders die Sätze 6, 7 und 8 S. 82 und die Sätze 10 und 11 S. 84. Wir wollen wieder eine einzelne (von der Identität verschiedene) Bewegung herausgreifen und zwar soll im Falle der hyperbolischen Geometrie die Bewegung eine *gleichsinnige* sein (vgl. den Satz 16 S. 64). Für die *elliptische* Geometrie gibt uns nun die Fig. 116 S. 136, für die *hyperbolische* Geometrie die Fig. 117 S. 140, 118 S. 142 und 120 S. 144 die Anschauung für

die einzelnen, hier dem § 18 gemäß in Frage kommenden Drehungen. Hierbei kommt jetzt aber nicht, wie früher, nur die Anfangs- und Endlage der Drehung in Betracht, sondern wir erkennen den kontinuierlichen Übergang von der einen Lage zur anderen durch die Drehung. Die Kreise der einzelnen Figuren sind eben die hierbei auftretenden Bahnkurven der einzelnen Punkte in der Ebene. Dementsprechend sind auch sogleich in den vier Figuren auf den Kreisen Pfeilspitzen hinzugefügt, entsprechend der Drehung in dem einen der beiden möglichen Drehungssinne. Den Mittelpunkt der Kreise können wir dann auch als *Mittelpunkt der Bewegung* bezeichnen. Am eigenartigsten ist gewiß die Fig. 118 S. 142 der hyperbolischen Geometrie, d. h. die Drehung um einen überunendlich fernen Punkt M. Hier gehen alle Pfeilrichtungen gleichsam vom Punkte T_2 aus, um wieder im Punkte T_1 zusammenzulaufen, d. h. bei beliebig groß ausgeführter Drehung in dem in der Figur angenommenen Drehungssinne nähern sich alle Punkte mehr und mehr dem Punkte T_1; abgesehen von den Punkten der Tangente $T_2 M$. Achten wir hierbei insbesondere einmal auf die

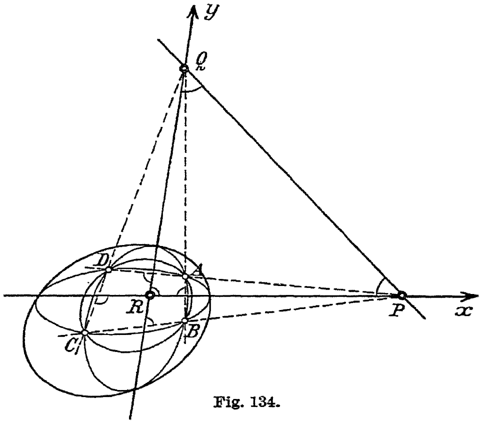


Fig. 134.

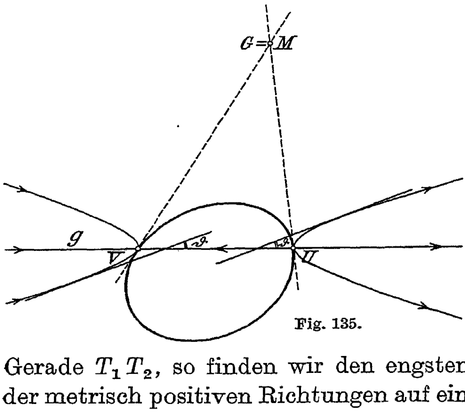


Fig. 135.

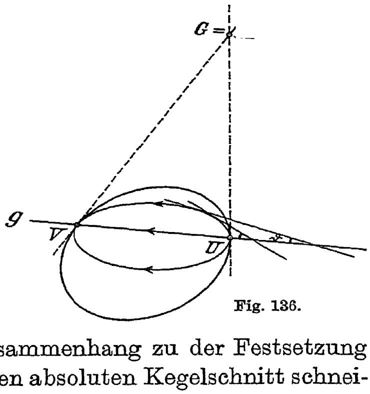


Fig. 136.

Gerade $T_1 T_2$, so finden wir den engsten Zusammenhang zu der Festsetzung der metrisch positiven Richtungen auf einer den absoluten Kegelschnitt schneidenden Geraden auf S. 104, wie dort schon angekündigt war.

Zum Schluß der Betrachtung über die Kreistheorie wollen wir noch folgende zu unseren bisherigen Betrachtungen in dualer Beziehung stehende Frage

aufwerfen: *Welches ist der geometrische Ort aller Geraden, welche eine gegebene Gerade g unter demselben Winkel ϑ schneiden?*

Wir wollen uns hier in aller Kürze auf den Fall beschränken, daß die gegebene Gerade eine eigentliche Gerade der hyperbolischen Geometrie ist. Wir betrachten dann einen der Kreise, der den Pol G von g als Mittelpunkt M hat. Wir erkennen sogleich als Folge der Tatsache, daß bei der Drehung um M die Gerade g unverändert bleibt, aber die Tangenten des Kreises sich längs desselben verschieben:

12. Der fragliche geometrische Ort ist ebenfalls ein Kreis, der durch die Gerade g und eine sie unter dem gegebenen Winkel ϑ schneidende Gerade bereits bestimmt ist (Fig. 135 und 136).

Sechster Abschnitt.

Das Bogenelement.

§ 29. Die Formeln für das nichteuklidische Bogenelement.

Wir wollen nun in der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie die Strecke, deren Länge durch eine Maßzahl festgelegt wird, unendlich klein wählen. Die Länge einer unendlich kleinen Strecke nennen wir ja das *Bogenelement* $d\sigma$. Die Formeln für $d\sigma$ sind z. B. deswegen schon von besonderer Wichtigkeit, weil wir damit auch die Länge eines Bogens bei einer beliebigen, durch ihre Gleichung gegebenen Kurve definieren und berechnen, überhaupt in die Theorie der ebenen Kurven in der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie eindringen können, ganz analog, wie dies in der euklidischen Geometrie geschieht.

In der *euklidischen* Geometrie gilt ja der Formel 2 S. 85 gemäß die Formel

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{1}$$

Wir wenden uns nun zunächst zur *hyperbolischen* Geometrie: Wir haben an den Satz 5 und die Formel (16) S. 97 anzuknüpfen, wobei wir uns auf eine *eigentliche* Strecke AB beschränken. Es soll nun der Punkt B beliebig nahe an dem Punkte A liegen. Wir wählen am einfachsten sogleich unhomogene Koordinaten (x, y), indem wir $s = 1$ setzen. Dann ist jetzt gemäß den Gleichungen (13a, b, c) S. 96, wenn wir noch den Index 1 bei den Koordinaten x_1, y_1 fortlassen,

$$a = x^2 + y^2 - \varkappa,$$

$$b = (x + dx)^2 + (y + dy)^2 - \varkappa = (x^2 + y^2 - \varkappa) + 2(x\,dx + y\,dy) + (dx^2 + dy^2)$$
$$= a + 2\,(x\,dx + y\,dy) + (dx^2 + dy^2),$$

$$c = x\,(x + dx) + y\,(y + dy) - \varkappa = (x^2 + y^2 - \varkappa) + (x\,dx + y\,dy)$$
$$= a + (x\,dx + y\,dy).$$

Also ist weiter

$$c^2 - ab = (x\,dx + y\,dy)^2 - a\,(dx^2 + dy^2)$$
$$= \varkappa\,(dx^2 + dy^2) - (y\,dx - x\,dy)^2 = \theta$$

und $\dfrac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}} = \dfrac{a + (x\,dx + y\,dy) - \sqrt{\theta}}{a + (x\,dx + y\,dy) + \sqrt{\theta}} = \dfrac{1 + \dfrac{(x\,dx + y\,dy) - \sqrt{\theta}}{a}}{1 + \dfrac{(x\,dx + y\,dy) + \sqrt{\theta}}{a}} = 1 - \dfrac{2\sqrt{\theta}}{a}$,

abgesehen von den Gliedern höherer Ordnung. Es ist daher gemäß der Gleichung (16) S. 97

$$d\sigma = \frac{\mu}{2} \log\left(1 - \frac{2\sqrt{\theta}}{a}\right)$$
$$= \frac{-\mu\sqrt{\theta}}{a}$$

oder

$$d\sigma = \frac{\mu\sqrt{\varkappa\,(dx^2 + dy^2) - (y\,dx - x\,dy)^2}}{\varkappa - (x^2 + y^2)}, \tag{2}$$

wo μ durch die Gleichung (10) S. 95 bestimmt ist.

Setzen wir *angenähert* $\mu = \sqrt{\varkappa}$ gemäß der Gleichung (10″) S. 96, so ergibt sich endlich

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2) - \frac{1}{\varkappa}\,(y\,dx - x\,dy)^2}}{1 - \frac{1}{\varkappa}\,(x^2 + y^2)} \tag{2a}$$

1. In der hyperbolischen Geometrie wird also das Bogenelement durch die Formel (2) *und angenähert durch die Formel* (2a) *gegeben.*

Bei Benutzung der angenäherten Formel (2a) werden also alle Längen von Strecken oder Kurvenbogen im Verhältnis $\sqrt{\varkappa} : \mu$ vergrößert.

Durch analoge Rechnung ergeben sich die Formeln für das Bogenelement in der *elliptischen* Geometrie; sie unterscheiden sich von den Formeln (2) und (2a) nur dadurch, daß $\varkappa$ durch $-\varkappa$ und μ durch $i\mu$ ersetzt ist. Es ist also

$$d\sigma = \frac{\mu\sqrt{\varkappa(dx^2 + dy^2) + (y\,dx - x\,dy)^2}}{\varkappa + (x^2 + y^2)}, \tag{3}$$

wo μ durch die Gleichung (9) S. 114 bestimmt ist, oder, wenn wieder *angenähert* $\mu = \sqrt{\varkappa}$ nach der Formel (9″) S. 114 gesetzt wird,

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2) + \frac{1}{\varkappa}\,(y\,dx - x\,dy)^2}}{1 + \frac{1}{\varkappa}\,(x^2 + y^2)} \tag{3a}$$

2. In der elliptischen Geometrie wird also das Bogenelement durch die Formel (3) *und angenähert durch die Formel* (3a) *gegeben.*

Wir bemerken noch:

3. Für $\lim \varkappa = \infty$ *gehen die Formeln* (2a) *und* (3a) *in die Formel* (1) *der euklidischen Geometrie über.*

Es sei noch folgendes hinzugefügt: Für $x = y = 0$ ergeben die Formeln (2) und (3) das Bogenelement

$$d\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}} \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{2*}$$

$$d\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}} \sqrt{dx^2 + dy^2} \tag{3*}$$

oder angenähert beidemal $d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

wie in der euklidischen Geometrie.

Für ein Bogenelement der x-Achse ergibt sich weiter

$$d\sigma = \mu \sqrt{\varkappa}\, \frac{dx}{\varkappa - x^2} \tag{2**}$$

bzw.

$$d\sigma = \mu \sqrt{\varkappa}\, \frac{dx}{\varkappa + x^2}. \tag{3**}$$

§ 30[1]. Die Beziehung zu Riemanns Habilitationsschrift.

Die Formeln für das Bogenelement wollen wir nun noch einer interessanten Umformung unterwerfen. Und zwar wollen wir zunächst uns mit dem Bogenelement der *elliptischen Geometrie*, also den Formeln (3) und (3a) befassen. Wir knüpfen hierbei an die bereits im Bd. I § 30 betrachtete Transformation der projektiven Ebene mit den Gleichungen (6a, b, c) S. 191 an, doch mit folgendem Unterschied: Während wir dort unter Beibehaltung des projektiven Koordinatensystems jedem Punkte (x, y, s) einen neuen Punkt (x^*, y^*, s^*) zugeordnet haben, wollen wir jetzt die Punkte unverändert lassen, aber jedem Punkte statt der projektiven Koordinaten (x, y, s) jetzt die neuen Koordinaten (x^*, y^*, s^*) zuordnen. So erhalten wir in der ganzen projektiven Ebene, in der nur die reellen Punkte, d. h. die Punkte mit reellen Koordinaten (x, y, s) uns weiterhin interessieren, ein neues (x^*, y^*, s^*)-Koordinatensystem, das natürlich nicht mehr ein projektives Koordinatensystem ist. Im allgemeinen hat also jeder Punkt *ein* (x^*, y^*, s^*)-Koordinatentripel. Nur jeder Punkt auf der Geraden $s = 0$ bekommt jetzt *zwei* Koordinatentripel (x^*, y^*, s^*) (vgl. unsere Festsetzungen S. 191 im Bd. I). Wir wollen uns demgemäß die projektive Ebene längs der Geraden $s = 0$ eingeschnitten denken. (Wir wissen ja ent-

1) Dieser § 30 kann beim ersten Studium fortgelassen werden.

sprechend dem Satze 2 S. 198 im Bd. I, daß hierdurch die projektive Ebene nicht etwa in zwei Teile zerfällt.) Dann bekommt jeder Punkt auf dem einen oder anderen Ufer des Schnittes auch nur *ein* Koordinatentripel (x^*, y^*, s^*). Es sei noch hervorgehoben, daß (nach unseren Festsetzungen) die neuen, auch stets reellen Koordinaten die Bedingung $x^{*2} + y^{*2} - r^2 s^{*2} \leqq 0$ oder unhomogen $x^{*2} + y^{*2} - r^2 \leqq 0$ erfüllen, also nicht alle möglichen Zahlenwerte annehmen.

Die Gleichungen (6a, b, c) der S. 191 im Bd. I lauten nun unhomogen

$$x^* = \frac{2rx}{r + \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}}, \qquad y^* = \frac{2ry}{r + \sqrt{x^2 + y^2 + r^2}} \tag{1 a, b}$$

Aus ihnen folgt umgekehrt

$$x = \frac{4r^2 x^*}{4r^2 - x^{*2} - y^{*2}}, \qquad y = \frac{4r^2 y^*}{4r^2 - x^{*2} - y^{*2}}. \tag{2 a, b}$$

Hieraus folgt sogleich weiter durch Differenzieren

$$dx = \frac{4r^2}{(4r^2 - x^{*2} - y^{*2})^2}\left[(4r^2 + x^{*2} - y^{*2})\,dx^* + 2x^* y^* dy^*\right],$$
$$dy = \frac{4r^2}{(4r^2 - x^{*2} - y^{*2})^2}\left[(4r^2 - x^{*2} + y^{*2})\,dy^* + 2x^* y^* dy^*\right]. \tag{3a, b}$$

Mit Hilfe der Formeln (2a, b) und (3a, b) wollen wir nun die Formel (3) S. 157 des Bogenelementes im vorigen Paragraphen auf das neue (x^*, y^*)-Koordinatensystem transformieren.

Doch soll nun die Zahl r^2 nicht mehr willkürlich gewählt sein, sondern es soll

$$r^2 = \varkappa, \tag{4}$$

also gleich der negativen Weltkonstanten sein (vgl. das Axiom 9 S. 40).

Es ergibt sich zunächst

$$dx^2 + dy^2$$
$$= \frac{16\varkappa^2}{(4\varkappa - x^{*2} - y^{*2})^4}\left[(4\varkappa - x^{*2} - y^{*2})^2 (dx^{*2} + dy^{*2}) + 16\varkappa(x^* dx^* + y^* dy^*)\right]$$

und
$$(y\,dx - x\,dy) = \frac{16\varkappa^2}{(4\varkappa - x^{*2} - y^{*2})^2}\left[y^* dx^* - x^* dy^*\right],$$

und hieraus folgt weiter für den Zähler der Formel (3) S. 157

$$\varkappa(dx^2 + dy^2) + (y\,dx - x\,dy)^2 = \frac{16\varkappa^3}{(4\varkappa - x^{*2} - y^{*2})^4}(4\varkappa + x^{*2} + y^{*2})^2 (dx^{*2} + dy^{*2}).$$

Andererseits ergibt sich für den Nenner der Formel (3) S. 157 nach den Transformationen (2a, b)

$$(\varkappa + x^2 + y^2)^2 = \varkappa^2 \frac{(4\varkappa + x^{*2} + y^{*2})^4}{(4\varkappa - x^{*2} - y^{*2})^4}.$$

Also geht die Formel (3) S. 157 über in die Formel

$$d\sigma = 4\mu\sqrt{\varkappa}\,\frac{\sqrt{dx^{*2} + dy^{*2}}}{4\varkappa + x^{*2} + y^{*2}}. \tag{5}$$

Setzen wir noch

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{\sqrt{\varkappa}}{\mu}\,x \\ y^* &= \frac{\sqrt{\varkappa}}{\mu}\,y^{**}, \end{aligned}\right\} \tag{6a, b}$$

so daß also jetzt jeder Punkt der projektiven Ebene die Koordinaten x^{**}, y^{**} erhält, so geht die Formel (5) endlich über in die Formel

$$d\sigma = \frac{\sqrt{dx^{**2} + dy^{**2}}}{1 + \frac{1}{4\mu^2}(x^{**2} + y^{**2})}. \tag{7}$$

1. In dem neuen (x^{**}, y^{**})-Koordinatensystem der projektiven Ebene wird also das Bogenelement der elliptischen Geometrie durch die Formel (7) *dargestellt.*

Diese Formel (7) für das Bogenelement ist ersichtlich wohl einfacher als die Formel (3) der S. 157. Doch wollen wir hervorheben, daß in dem neuen (x^{**}, y^{**})-Koordinatensystem einmal nicht ausnahmslos jeder Punkt der projektiven Ebene nur ein Paar neue Koordinaten hat und sodann auch die Gerade (die wir sehr bald als kürzeste Linie oder geodätische Linie erkennen werden) nicht mehr durch eine Gleichung ersten Grades $ax + by + c = 0$, wie im (x, y, s)-System, sondern durch die quadratische Gleichung

$$ax^{**} + by^{**} + c \cdot \frac{1}{4\mu\sqrt{\varkappa}} \cdot (4\mu^2 - x^{**2} - y^{**2}) = 0 \tag{8}$$

gegeben wird. (Für $\mu = \sqrt{\varkappa}$ und $\lim \mu = \infty$, d. h. für die euklidische Geometrie, geht die Gleichung (8) in die Gleichung $ax + by + c = 0$ über.) —

Nun wollen wir zunächst auch in der *hyperbolischen Geometrie* die Formel (2) für das Bogenelement in analoger Weise umformen. Da nach der Formel (4) $r^2 = \varkappa$ war, jetzt aber die Weltkonstante $-\varkappa$ durch $+\varkappa$ zu ersetzen ist, so werden wir nun auch in den Transformationsgleichungen (1a, b) und (2a, b) die Größe r durch ri ersetzen. Demgemäß bilden die folgenden Transformationsgleichungen den Ausgangspunkt unserer Betrachtung:

$$\left.\begin{aligned} x^* &= \frac{2rx}{r + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \\ y^* &= \frac{2ry}{r + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9a, b}$$

oder umgekehrt
$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{4r^2 x^*}{4r^2 + x^{*2} + y^{*2}}, \\ y &= \frac{4r^2 y^*}{4r^2 + x^{*2} + y^{*2}}. \end{aligned}\right\} \tag{10a, b}$$

Zur Deutung dieser Koordinatentransformation beachten wir vorerst: *Reellen Koordinaten* (x, y) *entsprechen nur dann wieder reelle Koordinaten* (x^*, y^*), *wenn*
$$x^2 + y^2 - r^2 \leqq 0 \tag{11}$$
ist.

Doch da uns für die Anwendung in der hyperbolischen Geometrie nur die Punkte im Innern des absoluten Kegelschnittes interessieren, so werden wir die Formel (4) auch hier gelten lassen und dann bei der Einführung der neuen Koordinaten (x^*, y^*) in der projektiven Ebene uns auf die der Ungleichung (11) mit ihren Koordinaten (x, y) genügenden Punkte beschränken. Auch setzen wir fest, daß in den Formeln (9a, b) die vorkommende Wurzel stets das *positive* Vorzeichen haben soll. Es haben auch die Koordinaten (x^*, y^*) stets dieselben Vorzeichen wie die Koordinaten (x, y). Wir erkennen weiter:

2. *Für den Koordinatenanfangspunkt R oder* $(x, y) = (0, 0)$ *gilt auch* $(x^*, y^*) = (0, 0)$. *Für die Punkte des Kegelschnittes*
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{12}$$
ist nach den Gleichungen (9a, b) *auch*
$$x^{*2} + y^{*2} - 4r^2 = 0. \tag{13}$$
Ist endlich
$$x^2 + y^2 - r^2 < 0, \tag{14}$$
so ist auch
$$x^{*2} + y^{*2} - 4r^2 < 0. \tag{15}$$
(Denn dann ist ja $\frac{x^2 + y^2}{(r + \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})^2} < 1$, da der Zähler $< r^2$, der Nenner aber $> r^2$ ist.) Um nun die Formel (2) S. 157. des Bogenelementes auf die neuen Koordinaten (x^*, y^*) umzuformen, haben wir die gleiche Rechnung durchzuführen wie soeben im Anschluß an die Formel (3) S. 157; es ist jetzt eben nur überall r^2 durch $-r^2$ und analog $\varkappa$ durch $-\varkappa$ und μ durch μi zu ersetzen. Dann erhalten wir der Formel (5) analog als Resultat für die hyperbolische Geometrie
$$d\sigma = 4\mu\sqrt{\varkappa}\,\frac{\sqrt{dx^{*2} + dy^{*2}}}{4\varkappa - (x^{*2} + y^{*2})} \tag{5a}$$
oder, nach Anwendung der Gleichungen (6a, b),
$$d\sigma = \frac{\sqrt{dx^{**2} + dy^{**2}}}{1 - \frac{1}{4\mu^2}(x^{**2} + y^{**2})}. \tag{7a}$$

3. *In dem neuen* (x^{**}, y^{**})*-Koordinatensystem der projektiven Ebene wird also das Bogenelement der hyperbolischen Ebene durch die Formel* (7a) *dargestellt.*

Durch diese Formeln (7) und (7a) haben wir den innigsten Anschluß an die berühmte Habilitationsschrift von Bernhard Riemann erreicht: *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* (1854).[1])

Wir können natürlich auf diese Untersuchungen Riemanns hier nicht im einzelnen eingehen. Nur folgendes sei angedeutet: Riemann denkt sich eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegeben und definiert zunächst das Bogenelement durch den allgemeinen quadratischen, doch beständig positiven Ausdruck

$$d\sigma^2 = \sum a_{ij}\, dx_i\, dx_j, \tag{16}$$

wo die a_{ij} Funktionen der n Koordinaten sind. Unter der Annahme nun, daß die Mannigfaltigkeit analog $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ „Bewegungen" zulasse wie unsere projektive Ebene ∞^3 Bewegungen, gibt Riemann den Satz:

4. Es lassen sich dann stets solche neue Koordinaten für die Mannigfaltigkeit einführen, daß das Bogenelement durch die einfache Formel gegeben ist

$$d\sigma = \frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}, \tag{17}$$

wo nunmehr die Größe α eine Konstante ist, die Riemann die (positive oder negative) Krümmung oder das Krümmungsmaß der Mannigfaltigkeit nennt.

5. In unserem Beispiel der projektiven Ebene ist also die Formel (7) *bzw.* (7a) *die Riemannsche Formel des Bogenelementes* (vgl. auch die Definition der Krümmung S. 118).

Die wesentliche Bedeutung der Riemannschen Arbeit liegt vor allem darin begründet, daß er bei der Aufstellung der Geometrie von ganz allgemeinen Annahmen ausgegangen ist und damit z. B. für den dreidimensionalen Raum außer der euklidischen Geometrie neben der bisher allein behandelten hyperbolischen Geometrie als gleichwertig die *elliptische* Geometrie gestellt, überhaupt alle Schranken für eine vorurteilslose Entwicklung der Geometrie entfernt hat. Hatte man doch bisher (seit Euklid) immer an der Annahme festgehalten, daß unser Raum jedenfalls unendlich groß sein müßte.

1) B. Riemann, Gesammelte Math. Werke, Leipzig 1876, S. 254—269. Diese Schrift ist auch besonders herausgegeben mit Erläuterungen von H. Weyl, 3. Aufl., Berlin 1923. An Riemanns Untersuchungen schließen die weiteren differentialgeometrischen Arbeiten an: H. v. Helmholtz, Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie (1866) und Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen (1868), abgedruckt in seinen wissenschaftlichen Abhandlungen, Bd. II, Leipzig 1883, S. 610—617 und S. 618—639 und die bereits in der Anmerkung S. 29 genannten Arbeiten von S. Lie. Von kurzen Referaten über die Schrift von Riemann seien genannt: R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, deutsch von H. Liebmann, Leipzig 1908, S. 160—164; M. Pasch und M. Dehn, Vorlesung. üb. neuere Geometrie, Berlin 1926, S. 196—199; F. Klein, Vorlesung. üb. nichteuklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 288—298.

Siebenter Abschnitt.

Die nichteuklidische Trigonometrie.

§ 31. Die Geraden sind die kürzesten Linien.

Wir wissen, daß in der euklidischen Geometrie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte A, B in einer Ebene die Strecke AB ist. Wir wollen nun untersuchen, ob auch in der hyperbolischen und der elliptischen Geometrie Gleiches gilt, wobei freilich in der elliptischen Geometrie noch darauf zu achten ist, daß es ja zwei Strecken mit denselben Endpunkten A, B gibt.

In der *hyperbolischen Geometrie* können wir bei unserer Untersuchung nun analog vorgehen, wie in der euklidischen Geometrie. Wir erwähnen zunächst den Satz:

1. *In jedem Dreieck der hyperbolischen Ebene ist ein Außenwinkel größer als jeder der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.*

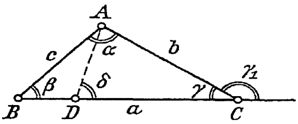


Fig. 137.

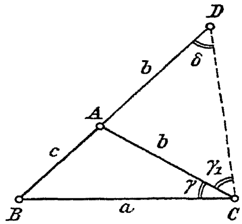


Fig. 138.

Denn es ist ja (Fig. 137) die Summe der Innenwinkel $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, aber die Summe $\gamma + \gamma_1 = \pi$, wo γ_1 der Außenwinkel zu γ ist. Folglich ist $\alpha + \beta < \gamma_1$, d. h. $\gamma_1 > \alpha$ und $\gamma_1 > \beta$. Ferner ergibt sich leicht der weitere Satz:

2. *In jedem Dreieck der hyperbolischen Geometrie liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.*

Es sei in dem Dreieck ABC die Seite $a > b$ (Fig. 137). Dann können wir die Seite b von C aus auf a bis D abtragen. In dem gleichschenkligen Dreieck ACD ist dann $\sphericalangle C\widehat{A}D = \sphericalangle C\widehat{D}A = \delta$, also ist $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \delta$. Nun aber ist im Dreieck ABD nach dem Satze 1 der Außenwinkel $\delta > \beta$. Also ist auch $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$.

Es gilt auch die Umkehrung:

3. *In jedem Dreieck der hyperbolischen Ebene liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.* Dieser Satz wird leicht indirekt bewiesen.

Nun aber läßt sich auch der folgende Satz einfach beweisen:

4. *In jedem Dreieck der hyperbolischen Ebene ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.*

In dem beliebigen Dreieck ABC sei $a \geqq b \geqq c$ (Fig. 138). Dann ist nur zu beweisen notwendig, daß $b + c > a$ ist. Wir verlängern nun die Seite c über A hinaus um b bis zum Punkte D. Im gleichschenkligen Dreieck ADC ist dann

$\sphericalangle \delta = \sphericalangle \gamma_1$. Also ist $\sphericalangle (\gamma + \gamma_1) > \sphericalangle \delta$ und folglich im Dreieck BCD $b + c > a$ nach dem Satze 3.

Es sei nun eine beliebige Strecke PQ gegeben. Außerdem mögen die Punkte P, Q durch eine beliebige Kurve $\overset{\frown}{PQ}$ verbunden sein, die auch evtl. sich selbst oder die Strecke PQ schneiden kann (Fig. 139). Von dieser Kurve wollen wir indessen voraussetzen, daß sie aus einer endlichen Zahl von Kurvenbogen mit der folgenden Eigenschaft zusammengesetzt sei: Der einzelne Kurvenbogen soll durch Gleichungen der Form bestimmt sein

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

wo $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ zwei nicht beide konstante, reelle, stetige und eindeutige Funktionen der reellen Variablen t sind für ein bestimmtes endliches Intervall, das die Variable t durchlaufen soll. Überdies sollen die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ für alle Werte t des Intervalles endliche und stetige erste Ableitungen $\varphi'(t)$ und $\psi'(t)$ besitzen, die überdies nicht gleichzeitig für einen Wert t des Intervalles verschwinden. Die gesamte Kurve sowie jeder Teil von ihr hat dann eine bestimmte endliche Bogenlänge.[1] (Die analoge Voraussetzung soll übrigens später auch für alle anderen eingeführten Kurven gelten.) Die Bogenlänge der Kurve sei späterhin mit σ bezeichnet.

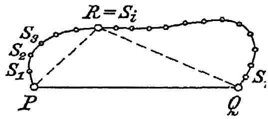


Fig. 139.

Wir wollen nun nachweisen:

5. Jede solche Kurve $\overset{\frown}{PQ}$ ist stets größer als die Strecke PQ.

Es sei R ein beliebiger Punkt der Kurve $\overset{\frown}{PQ}$; er möge nicht auf der Strecke PQ liegen, sonst ist die Betrachtung im folgenden ein wenig abzuändern: Dann ist nach dem Satze 4 $PR + RQ > PQ$. Wir brauchen daher nur zu zeigen, daß $\overset{\frown}{PR} > PR$ und analog $\overset{\frown}{RQ} > RQ$ ist. Diesen Zerlegungsprozeß können wir aber beliebig fortsetzen, mit anderen Worten: Wir denken gleich den Bogen $\overset{\frown}{PQ}$ in unendlich viele, unendlich kleine Teile $\overset{\frown}{PS_1} + \overset{\frown}{S_1S_2} + \overset{\frown}{S_2S_3} + \cdots + \overset{\frown}{S_nQ}$ zerlegt. Diese unendlich kleinen Teile können wir als *geradlinig* ansehen. Es ist dann allgemein nach dem Satze 4

$$\overset{\frown}{PS_1} + \overset{\frown}{S_1S_2} > PS_2,$$
$$PS_2 + \overset{\frown}{S_2S_3} > PS_3$$

1) Vgl. z. B. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik, Bd. III, Leipzig, 3. Aufl., 1922, S. 175 sowie Fr. Schilling, Die Theorie und Konstruktion der Kurven konstanter Breite, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 63, 1914, S. 71.

und so fort. Also ist auch

$$\sigma = \widehat{PS_1} + \widehat{S_1S_2} + \cdots + \widehat{S_nQ} = \widehat{PQ} > PQ.$$

(Genauer können wir noch folgendes ausführen: Es sei die Einteilung der Kurve durch die einander beliebig nahen Punkte S_i bereits soweit ausgeführt, daß die Bogenlänge

$$\sigma = (PS_1 + S_1S_2 + \cdots + S_nQ) + \eta = \Sigma + \eta$$

ist, wo $|\eta|$ kleiner als eine beliebig kleine vorgegebene Zahl, jedenfalls kleiner als die sogleich eingeführte Zahl ϑ ist. Nun ist

$$(PR + RQ) - PQ = \vartheta > 0,$$

wo ϑ für einen bestimmten Punkt R eine *bestimmte* positive Zahl ist, und

$$\Sigma > (PR + RQ).$$

Also ist $\quad \Sigma - PQ > \vartheta > 0$

und ebenso $\quad \sigma - PQ = (\Sigma + \eta) - PQ > 0.)$

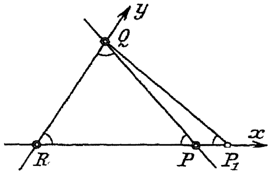


Fig. 140.

Wir haben hiermit also gezeigt:

6. Die Strecke PQ ist in der Tat die kürzeste Verbindungslinie der Punkte P, Q.

Wir wenden uns jetzt zur *elliptischen Geometrie*. Hier liegen indes die Verhältnisse komplizierter, letzten Endes aus dem Grunde, weil jede Gerade eben eine endliche Länge hat. Schon der Satz 1 gilt jetzt nicht mehr für alle Dreiecke.[1]) Wir können uns ja gleich ein Dreieck konstruieren, für welches der Satz 1 nicht gilt. Wir gehen einfach aus von dem Fundamentaldreieck PQR der Fig. 52 S. 38, das ja drei rechte Winkel besitzt, und betrachten nun das Dreieck P_1QR, wo der Endpunkt P_1 ein wenig über P *in positiver Richtung* hinaus liegt (Fig. 140). In diesem Dreieck ist zwar auch der Winkel $Q\widehat{P_1}R = \frac{\pi}{2}$, aber der Winkel $P_1QR > \frac{\pi}{2}$. Also ist der Außenwinkel an der Ecke R kleiner als der Innenwinkel an der Ecke Q.

Wohl aber gelten auch in der *elliptischen* Geometrie die Sätze 2, 3 und 4, die also im Gegensatz zum Satze 1 Sätze der „*absoluten*", d. h. der vom Parallelenaxiom unabhängigen, Geometrie sind, und mit gewisser Einschränkung die Sätze 5 und 6, wie wir sogleich noch sehen werden.

Wir wollen zunächst bemerken: In der elliptischen Geometrie haben wir besonders zu beachten: Es handelt sich ja evtl. um Dreiecke, die nicht unmittelbar

1) Vgl. deswegen auch: M. Simon, Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung, Beiheft 10 der Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, Berlin 1925, S. 2 und S. 32.

vor unseren Augen liegen, also z. B. etwa eine oder mehrere Seiten $> \frac{l}{2}$ besitzen, wo l hier wie im folgenden wieder die ganze Länge jeder Geraden bedeute. Wir wollen in dieser Hinsicht einen Blick auf das schraffierte Dreieck der Fig. 141 werfen. Wir denken dann eine Gerade g so gezogen, daß sie das Dreieck ABC nicht durchschneidet. Dann können wir immer auch ein Hilfsdreieck UVW, dessen Seite VW der Geraden g angehört, hinzudenken, so daß die Dreiecksfläche ABC *innerhalb* des Hilfsdreiecks UVW gelegen ist. Nach dem Satze 9 im Bd. I S. 50 der projektiven Geometrie können wir nun stets ein *projektives* Abbild unseres gegebenen Dreiecks ABC uns schaffen, das unmittelbar vor unseren Augen, d. h. in einem vor uns liegenden gegebenen begrenzten Dreiecksgebiet liegt. Diese Bemerkung mag dazu dienen, die Erkenntnis von der Allgemeinheit unserer Anschauung bei den Lageverhältnissen in den folgenden Figuren zu erleichtern.

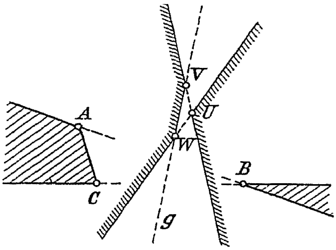


Fig. 141.

Wir wenden uns jetzt zunächst zu dem Beweise des Satzes:

7. *In jedem Dreieck, auch der elliptischen Geometrie, ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte Seite.*

Es sei wieder das Dreieck ABC mit der Bedingung $a \geqq b \geqq c$ gegeben. Es bleibt nur zu zeigen, daß $b + c > a$ ist. Angenommen, dies wäre nicht der Fall. Dann wäre entweder $b + c = a$ oder $b + c < a$. Im ersten Falle würde es einen Punkt D auf BC geben, so daß die Dreiecke ADB und ADC gleichschenklig wären (Fig. 142). Dann aber wäre

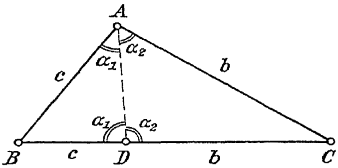


Fig. 142.

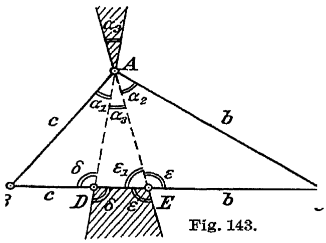


Fig. 143.

$$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 = \sphericalangle A\widehat{D}B + \sphericalangle A\widehat{D}C = \pi,$$

was unmöglich ist. Wenn aber $b + c < a$ wäre, dann könnten wir die Seite c von B aus bis D und die Seite b von C aus bis E auf der Seite a abtragen und beim Durchlaufen der Seite a würden wir dann die Punkte dort in der Reihenfolge B, D, E, C antreffen (Fig. 143). Dann aber läßt sich zeigen, daß stets $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1 + \sphericalangle \alpha_2 + \sphericalangle \alpha_3 > \pi$ sein müßte, was wieder unmöglich ist.

Bei Gültigkeit der *euklidischen* oder der *hyperbolischen* Geometrie wäre ja in der Fig. 143 nach dem Satze 1

$$\sphericalangle\, \alpha_1 = \sphericalangle\, \delta > \sphericalangle\, \varepsilon_1$$

$$\sphericalangle\, \alpha_2 = \sphericalangle\, \varepsilon$$

$$\sphericalangle\, \alpha_1 + \alpha_2 > \sphericalangle\, \varepsilon + \varepsilon_1 = \pi,$$

also auch

$$\sphericalangle\, \alpha > \pi.$$

Und in der *elliptischen* Geometrie wäre in dem schraffierten Dreieck ADE der Fig. 143 die Summe der drei Winkel gleich

$$\delta + \varepsilon + \alpha_3 > \pi,$$

also auch

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi.$$

Hiermit ist der gewünschte Beweis erbracht. (Übrigens könnten wir den letzten Beweis leicht auch wie folgt führen: In jeder der drei Geometrien gibt es ein gleichseitiges Dreieck $A_0B_0C_0$, für welches also stets die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist. Wir können nun leicht zeigen, daß wir durch stetige Abänderung dieses Dreieck $A_0B_0C_0$ in ein beliebig gegebenes anderes Dreieck ABC überführen können. Wäre nun in dem Dreieck ABC etwa $b + c < a$, so müßte bei der Überführung des einen Dreiecks in das andere auch einmal ein Dreieck passiert werden, für welches $b + c = a$ wäre, was doch, wie wir sahen, unmöglich ist. Dieser Beweis hat den Vorzug, daß er für alle drei Geometrien gleichmäßig gilt.)

Aus dem Satze 7 folgt nun leicht noch der folgende Satz:

8. In jedem Dreieck der elliptischen Geometrie ist die Summe aller drei Seiten kleiner als $2l$.

Zu jedem gegebenen Dreieck ABC gehören ja drei „Nebendreiecke“, da eben die drei Seitengeraden des gegebenen Dreiecks die ganze projektive Ebene in vier Dreiecke zerlegen. Eines dieser Nebendreiecke hat dann z. B. die Seiten a, $l - b$, $l - c$, wo a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC sind. Es ist dann für dieses Nebendreieck

$$(l - b) + (l - c) > a,$$

woraus

$$a + b + c < 2l$$

folgt. (Umgekehrt ergibt sich aus dem Satze 8 auch leicht der Satz 7.)

Nun wenden wir uns weiter zu dem Satze:

9. In jedem Dreieck, auch der elliptischen Geometrie, liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber und umgekehrt.

Ist im Dreieck ABC z. B. $\sphericalangle \alpha > \sphericalangle \beta$ (Fig. 144), so tragen wir den $\sphericalangle \beta$ an AB nach derselben Seite, nach der $\sphericalangle \alpha$ liegt, ab. Der freie Schenkel schneidet die Seite BC im Punkte D. Dann ist $AD = BD$, aber $AD + DC > AC = b$, also auch $a > b$. Die Umkehrung des Satzes 9 ist aber leicht indirekt zu beweisen.

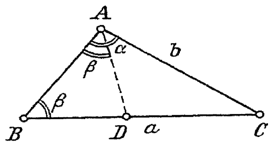


Fig. 144.

Ist nun in der *elliptischen* Geometrie eine Strecke PQ gegeben, so kann diese ja $\gtreqless \frac{l}{2}$ sein. Es gilt dann der Satz:

10. Ist eine Strecke $PQ \leqq \frac{l}{2}$, *so ist sie die kürzeste Verbindungslinie unter allen Kurven* $\widehat{PQ}$.

Wir beweisen diesen Satz folgendermaßen: Es sei eine beliebige Kurve $\widehat{PQ}$ zur Strecke PQ hinzugegeben (Fig. 145). Es sei R ein beliebiger Punkt auf der Kurve $\widehat{PQ}$, der nicht auf der Geraden PQ liege. Durch die drei Verbindungslinien der Punkte P, Q, R sind vier Dreiecke bestimmt. Wir wählen von diesen ein solches Dreieck aus, dessen beide Seiten PR und $QR \leqq \frac{l}{2}$ sind, was stets möglich ist, und zwar für $PR < \frac{l}{2}$ und $QR < \frac{l}{2}$ *eindeutig*. Dieses Dreieck kann zur gegebenen Strecke PQ oder zu der ergänzenden Strecke $(PQ) \geqq \frac{l}{2}$ gehören. Jedenfalls ist aber in diesem Dreieck $PR + RQ > PQ$ bzw. (PQ), d. h. stets $PR + RQ > PQ$. Mit der Strecke PR und der zugehörigen Kurve $\widehat{PR}$ bzw. mit der Strecke RQ und der zugehörigen Kurve $\widehat{RQ}$ können wir dann analog weiter verfahren, wie soeben bei dem Beweise des Satzes 5. Es sei noch hervorgehoben: Da wir bei jedem neuen Dreieck die beiden neuen Seiten stets $\leqq \frac{l}{2}$ wählen, so muß bei hinreichend nahen Teilpunkten S_i, S_{i+1} der Kurve $\widehat{PQ}$ stets diejenige Strecke $S_i S_{i+1}$ zu den Dreiecksseiten gehören, welche die sehr kleine Sehne des Teilbogens $\widehat{S_i S_{i+1}}$ darstellt.

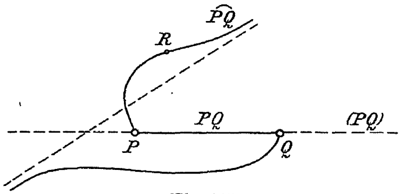


Fig. 145.

Allgemein können wir daher den sinngemäß zu verstehenden Satz aussprechen:

11. In allen drei Geometrien sind die Geraden die kürzesten Linien.[1])

1) Was insbesondere die nähere Beziehung dieser Tatsache zu den Axiomen betrifft, so sehe man deswegen meine demnächst in den Math. Annalen erscheinende Arbeit: Neue Beispiele von Geometrien, in welchen die Geraden die Kürzesten sind, woselbst auch die weitere Literatur angegeben ist.

Es gilt aber auch der weitere Satz:

12. Es sei in der elliptischen Ebene eine Strecke $PQ > \frac{l}{2}$ und eine Gerade g gegeben, welche die Strecke PQ nicht schneidet. Dann ist die Strecke PQ die kürzeste Verbindungslinie unter all den Kurven $\widehat{PQ}$, welche die Gerade g gar nicht oder eine gerade Anzahl von Malen schneidet.

(Hierbei sei noch beachtet: Eine solche Kurve $\widehat{PQ}$ kann z. B. die Gerade g auch einfach berühren; diese Berührung kann als kein oder zwei Schnittpunkte gezählt werden. Es kann ferner die Kurve $\widehat{PQ}$ auch ein Stück lang auf der Geraden g selbst verlaufen. Im Falle der Fig. 146a ist dann ein Schnittpunkt, im Falle der Fig. 146b sind zwei oder kein Schnittpunkt zwischen Kurve und Gerade zu zählen, wie schon eine geringe Drehung der Geraden um den Punkt O zeigt. Genauer brauchen wir wohl kaum hierauf einzugehen. Übrigens wollen wir im folgenden durch zweckmäßige Wahl der Geraden g alle solche Möglichkeiten ausgeschlossen denken, so daß nur gewöhnliche Schnittpunkte zwischen $\widehat{PQ}$ und g vorliegen.)

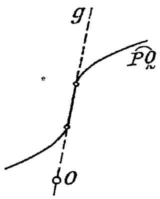


Fig. 146a.

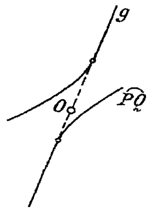


Fig. 146b.

Wir haben im Satze 12 die Strecke PQ sogleich $> \frac{l}{2}$ vorausgesetzt, da im anderen Falle ja schon der Satz 10 gilt.

Hinsichtlich des Beweises des Satzes 12 sei zur Veranschaulichung die in der Fig. 147a stark ausgezogene Strecke $PQ > \frac{l}{2}$ gegeben und dazu irgendeine Kurve $\widehat{PQ}$ von endlicher Länge, welche die die Strecke PQ nicht schneidende Gerade g zunächst gar nicht schneide. Wir teilen dann die Kurve PQ in eine endliche Zahl von Teilen so ein durch die Teilpunkte R_1, R_2, R_3, $\ldots$, R_n, daß die einzelnen Teilbogen $\widehat{PR_1}$, $\widehat{R_i R_{i+1}}$ und $\widehat{R_n Q}$ die Gerade g nicht schneidende Sehnen PR_1, $R_i R_{i+1}$ und $R_n Q$ besitzen, die $\leqq \frac{l}{2}$ sind. Nach dem Satze 10 ist dann jeder Teilbogen größer als die zugehörige Sehne oder ihr gleich, wenn die Sehne selbst der Teilbogen ist. Folglich haben wir nur noch zu beweisen, daß die Summe der Sehnen oder die gebrochene Linie $PR_1R_2 \ldots \ldots R_nQ$ größer als die Strecke PQ ist. Wir betrachten nun dasjenige Dreieck PQR_1, dessen drei Seiten von der Geraden g nicht geschnitten werden (vgl. das Hilbertsche Axiom II, 4 im Bd. I S. 10). Dieses Dreieck hat als zwei Seiten die gegebene Strecke PQ und die Sehne PR_1, und es ist in ihm $PR_1 + R_1Q > PQ$ nach dem Satze 7. Wir fahren dann analog fort und betrachten das Dreieck R_1QR_2, dessen Seiten von der Geraden g nicht geschnitten werden.

In ihm ist dann $R_1R_2 + R_2Q > R_1Q$. Also ist auch $PR_1 + R_1R_2 + R_2Q > PQ$. In analoger Weise fortfahrend ergibt sich das gewünschte Resultat

$$PR_1 + R_1R_2 + \cdots + R_nQ > PQ.$$

Wenn aber die Kurve $\widehat{PQ}$ die Gerade g eine *gerade* Anzahl von Malen durchschneidet (Fig. 147b), wollen wir die Kurve $\widehat{PQ}$ wieder in Teile durch die Teilpunkte $R_1, R_2, \ldots, R_n$ einteilen mit folgender Festsetzung: Keiner der Teilpunkte soll mit einem Schnittpunkte der Geraden g und der Kurve $\widehat{PQ}$ zusammenfallen, und zwischen je zwei Teilpunkten soll höchstens *ein* solcher

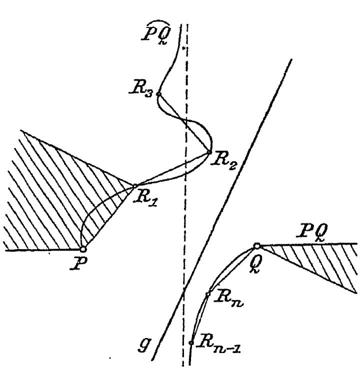


Fig. 147 a.

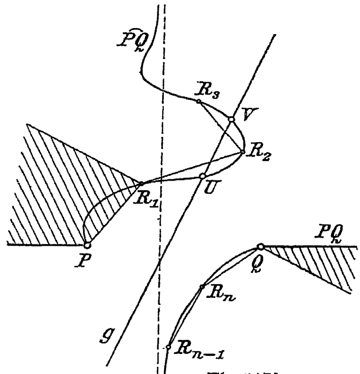


Fig. 147 b.

Schnittpunkt liegen. Ferner soll zu jedem Teilbogen diejenige Sehne PR_1 bzw. R_iR_{i+1}, R_nQ gehören, welche die Gerade g schneidet oder nicht schneidet, je nachdem der zugehörige Teilbogen die Gerade g schneidet oder nicht schneidet. Der letzte Teilbogen $\widehat{R_nQ}$ und also auch die letzte Sehne soll von g nicht geschnitten werden. Jede dieser Sehnen soll endlich wieder $\leqq \frac{l}{2}$ sein. Daß alle diese Bedingungen zu erfüllen sind, übersieht man leicht.

Es ist nun wieder nur zu zeigen, daß die Ungleichung

$$PR_1 + R_1R_2 + \cdots + R_nQ > PQ \quad \text{gilt.}$$

Wir betrachten nun zunächst das Dreieck PQR_1, dessen zwei Seiten PQ und PR_1 die vorhandenen Strecken sind. Die dritte Seite QR_1 wird dann von der Geraden g geschnitten oder nicht, je nachdem die Seite PR_1 geschnitten wird oder nicht, auf Grund des Hilbertschen Axioms II, 4. In diesem Dreieck ist $PR_1 + R_1Q > PQ$. Dann betrachten wir das Dreieck R_1QR_2, dessen zwei Seiten R_1Q und R_1R_2 die vorhandenen Strecken sind. Es ist nun wieder

$R_1R_2 + R_2Q > R_1Q$ und also $PR_1 + R_1R_2 + R_2Q > PQ$. So fortfahrend ergibt sich das gewünschte Resultat, wenn wir noch zeigen, daß in dem letzten Dreieck $R_{n-1}QR_n$ die eine Seite die vorhandene Strecke R_nQ ist. Jetzt kommt aber die Voraussetzung zur Geltung, daß die Gerade g eine *gerade* Anzahl von Malen die Strecken PR_1, R_iR_{i+1}, R_nQ durchschneidet. Dieser Voraussetzung entsprechend ist leicht zu erkennen, daß in dem letzten Dreieck $R_{n-1}QR_n$ die Seite R_nQ von der Geraden g nicht geschnitten wird, also die vorhandene Strecke ist, weil die Seite $R_{n-1}Q$ von g geschnitten wird oder nicht, je nachdem $R_{n-1}R_n$ von g geschnitten wird oder nicht. In dem Beispiel der Fig. 147b wird die Seite R_1Q von g nicht geschnitten, die Seite R_2Q geschnitten, die Seite R_3Q nicht geschnitten und so fort, also auch $R_{n-1}Q$ nicht geschnitten.

Es sei endlich noch hinzugefügt: Ist in der elliptischen Ebene eine Strecke $PQ > \frac{l}{2}$ und eine Gerade g gegeben, welche die Strecke PQ nicht schneidet, dann kann eine Kurve $\widehat{PQ}$, welche die Gerade g eine *ungerade* Anzahl von Malen durchschneidet, $\gtreqless PQ$ sein. Es ist ja z. B. die ergänzende Strecke $(PQ) < PQ$, und es hat dann keine Schwierigkeit, auch eine Kurve $\widehat{PQ}$ zu zeichnen, die größer oder gleich PQ ist.

§ 32. Die trigonometrischen Formeln der nichteuklidischen Geometrien.

Wir wollen nun auch die Trigonometrie, die Dreiecksberechnung, in der elliptischen und hyperbolischen Geometrie entwickeln. Was zunächst die *elliptische* Geometrie betrifft, so kennen wir ja völlig die Trigonometrie in der analogen Geometrie, der sphärischen Geometrie, oder die sphärische Trigonometrie. Bezeichnen wir in dem sphärischen Dreieck ABC auf der Kugel vom Radius r die Seitenlängen und die Winkel mit a, b, c und α, β, γ, so gelten zunächst die folgenden Formeln für das an der Ecke C *rechtwinklige* Dreieck:

$$\sin\frac{a}{r} = \sin\frac{c}{r}\sin\alpha, \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{a}{r}\sin\beta, \tag{2}$$

$$\sin\frac{a}{r} = \operatorname{tg}\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\beta, \tag{3}$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctg}\frac{c}{r}\operatorname{tg}\frac{a}{r}, \tag{4}$$

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}, \tag{5}$$

$$\cos\frac{c}{r} = \operatorname{ctg}\alpha\, c \tag{6}$$

Hierzu kommen noch die vier Formeln, die durch die Vertauschung von a, α mit b, β sich aus den Formeln (1) bis (4) ergeben. Für alle zehn Formeln gilt bekanntlich die einfache *Regel von Neper.*[1])

Ferner gelten für das *allgemeine* Dreieck ABC:

der *Sinussatz:*

$$\sin\frac{a}{r} : \sin\frac{b}{r} : \sin\frac{c}{r} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \tag{7}$$

der *Seitenkosinussatz:*

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\alpha \tag{8}$$

und der *Winkelkosinussatz:*

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{r}, \tag{9}$$

wobei natürlich wieder zu den Formeln (8) und (9) noch die durch zyklische Vertauschung der Seiten und Winkel sich ergebenden hinzutreten.

Alle diese Formeln können wir nun sofort auf ein Dreieck ABC in der elliptischen Geometrie übertragen. Bei dieser Übertragung ist dann der Radius r durch die Größe μ zu ersetzen (vgl. die Bemerkung über die Krümmung des elliptischen Raumes S. 118 im Vergleich mit der Krümmung $\frac{1}{r^2}$ der Kugel im euklidischen Raum).

Somit haben wir sofort alle entsprechenden Formeln der Trigonometrie in der elliptischen Geometrie gewonnen.

1. In der elliptischen Geometrie lautet für ein allgemeines Dreieck:

der Sinussatz:

$$\sin\frac{a}{\mu} : \sin\frac{b}{\mu} : \sin\frac{c}{\mu} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \tag{7'}$$

der Seitenkosinussatz:

$$\cos\frac{a}{\mu} = \cos\frac{b}{\mu}\cos\frac{c}{\mu} + \sin\frac{b}{\mu}\sin\frac{c}{\mu}\cos\alpha, \tag{8'}$$

der Winkelkosinussatz:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\frac{a}{\mu}. \tag{9'}$$

Wir können hier gleich einen Blick auf den Grenzübergang $\lim \varkappa = \infty$, d. h. den *Grenzübergang zur euklidischen Geometrie* werfen. Für $\lim \varkappa = \infty$ ist ja auch $\lim \mu = \infty$. Es ist also für sehr große Werte $\varkappa$ z. B.

$$\sin\frac{a}{\mu} = \frac{a}{\mu}$$

und

$$\cos\frac{a}{\mu} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2\mu} = 1 - \frac{a^2}{2\mu^2}.$$

1) Diese Regel findet sich ja überall in den elementaren Lehrbüchern angeführt, z. B. H. Frank, Mathematik für höhere Schulen, Münster i. W. 1928, S. 69.

Also ergeben die Gleichungen (7′), (8′) und (9′) für sehr große Werte μ

$$\frac{a}{\mu} : \frac{b}{\mu} : \frac{c}{\mu} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

oder

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \tag{10}$$

ferner

$$\frac{a^2}{\mu^2} = \frac{b^2}{\mu^2} + \frac{c^2}{\mu^2} - \frac{2bc}{\mu^2}\cos\alpha$$

oder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{11}$$

und

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cdot\left(1 - \frac{a^2}{2\mu^2}\right), \tag{12}$$

d. h.

2. *Für* $\lim \mu = \infty$ *ergibt sich der Sinussatz und der Kosinussatz der euklidischen Geometrie, sowie die Gleichung*

$$\cos\alpha = -\cos(\beta + \gamma),$$

die ja unmittelbar aus der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ *folgt.*

Nun wollen wir aber wünschen, doch die trigonometrischen Formeln der elliptischen Geometrie unmittelbar, d. h. ohne auf die sphärische Geometrie zurückzugehen, zu gewinnen. Diesen Wunsch können wir uns überraschend einfach erfüllen. Wir betrachten zunächst ein an der Ecke C rechtwinkliges Dreieck ABC der elliptischen Ebene und wollen dieses so in dem projektiven Koordinatensystem gelegen denken (Fig. 148), daß die Punkte A, B und C die Koordinaten $(x, 0, 1)$, $(0, y, 1)$ und $(0, 0, 1)$ besitzen und etwa noch das Dreieck ABC in dem Winkelraum des von den positiven (x, y)-Richtungen gebildeten rechten Winkels liegt. Dies ist ja durch eine entsprechende Bewegung des zunächst irgendwo gelegenen Dreiecks stets zu erreichen möglich. Wir berechnen nun einfach die Längen der Seiten a, b, c und die Winkel α, β nach unseren allgemeinen Formeln (2′) S. 115 und (26a, b) S. 119. Die in diesen Formeln auftretenden Größen müssen wir aber jetzt ausdrücklich $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ benennen, da sie ja von den Seiten und Winkeln $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ verschieden sind.

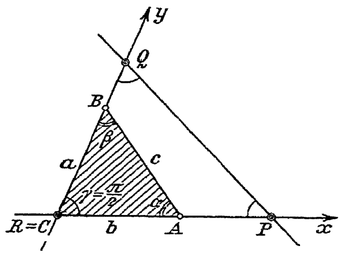


Fig. 148.

Es ist zunächst die Seite

$$a = CB = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{\bar{c} - i\sqrt{\bar{a}\bar{b} - \bar{c}^2}}{\bar{c} + i\sqrt{\bar{a}\bar{b} - \bar{c}^2}},$$

wo jetzt gemäß den Formeln (3a, b, c) S. 113

$$\bar{a} = \varkappa,$$
$$\bar{b} = y^2 + \varkappa,$$
$$\bar{c} = \varkappa,$$

also

$$\bar{a}\bar{b} - \bar{c}^2 = \varkappa y^2$$

ist. Es ergibt sich somit

$$\frac{a}{\mu} = \frac{i}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa} - iy}{\sqrt{\varkappa} + iy} = i \log \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa} - iy}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa} + iy}}. \tag{13a}$$

Analog ergibt sich

$$\frac{b}{\mu} = \frac{i}{2} \log \frac{\sqrt{\varkappa} - ix}{\sqrt{\varkappa} + ix} \tag{13b}$$

und

$$\frac{c}{\mu} = \frac{i}{2} \log \frac{\varkappa - i\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) + x^2 y^2}}{\varkappa + i\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) + x^2 y^2}}. \tag{13c}$$

Hieraus folgt ferner

$$e^{i\frac{a}{\mu}} = \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa} + iy}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa} - iy}},$$

also

$$\cos\frac{a}{\mu} = \frac{e^{i\frac{a}{\mu}} + e^{-i\frac{a}{\mu}}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa} + iy}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa} - iy}} + \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa} - iy}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa} + iy}}\right]$$
$$\frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa} + iy}\,\sqrt{\sqrt{\varkappa} - iy}}$$

oder

$$\cos\frac{a}{\mu} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa + y^2}},$$
$$\sin\frac{a}{\mu} = \frac{e^{i\frac{a}{\mu}} - e^{-i\frac{a}{\mu}}}{2i} \qquad \frac{y}{\sqrt{\varkappa + y^2}} \tag{14a, b}$$

Analog wird

$$\cos\frac{b}{\mu} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa + x^2}},$$
$$\sin\frac{\ }{\mu} = \frac{\ }{\sqrt{\varkappa + x^2}} \tag{15a, b}$$

und

$$\cos\frac{c}{\mu} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa + x^2}\,\sqrt{\varkappa + y^2}},$$
$$\sin\frac{c}{\mu} = \frac{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) + x^2 y^2}}{\sqrt{\varkappa + x^2}\,\sqrt{\varkappa + y^2}}. \tag{16a, b}$$

Nun haben weiter die Geraden der Seiten a, b, c des Dreiecks als Linienkoordinaten (u, v, t) die Werte

$$(1, 0, 0), \ (0, 1, 0) \text{ und } (y, x, -xy).$$

Also ist z. B. für den Winkel α gemäß den Formeln (20a, b, c) S. 118

$$\bar{\alpha} = 1,$$
$$\bar{\beta} = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{\varkappa},$$
$$\bar{\gamma} = x,$$

also

$$\bar{\alpha}\bar{\beta} = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{\varkappa},$$
$$\bar{\alpha}\bar{\beta} - \bar{\gamma}^2 = y^2\left(1 + \frac{x^2}{\varkappa}\right).$$

Es ergibt sich somit nach den Gleichungen (26a, b, c) S. 119

$$\cos\alpha = \frac{x\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa(x^2+y^2) + x^2 y^2}},$$
$$\sin\alpha = \frac{y\sqrt{\varkappa + x^2}}{\sqrt{\varkappa(x^2+y^2) + x^2 y^2}}. \qquad (17\text{a, b})$$

Analog ist

$$\cos\beta = \frac{y\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa(x^2+y^2) + x^2 y^2}},$$
$$\sin\beta = \frac{x\sqrt{\varkappa + y^2}}{\sqrt{\varkappa(x^2+y^2) + x^2 y^2}} \qquad (18\text{a, b})$$

3. *Nach den so gewonnenen Gleichungen* (14)—(18) *ergeben sich nun die trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck der elliptischen Geometrie von selbst.*

Es ergibt sich ja z. B. für die aus der Formel (6) sich ergebende Formel

$$\cos\frac{c}{\mu} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} \qquad (6')$$

eine Identität, wenn wir auf beiden Seiten für die sin- und cos-Funktionen ihre Werte nach den Gleichungen (16a) und (17a, b), (18a, b) einsetzen.

Nun ist allbekannt, daß sich die für das allgemeine sphärische Dreieck ABC geltenden Formeln (7), (8) und (9) aus den für das rechtwinklige sphärische Dreieck geltenden ableiten lassen, indem man das allgemeine Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegt. Ganz ebenso gewinnen wir die für das allgemeine Dreieck ABC der elliptischen Geometrie geltenden Formeln (7′), (8′) und (9′) aus den für das rechtwinklige Dreieck geltenden, indem wir das allgemeine Dreieck durch eine Höhe in zwei rechtwinklige zerlegen (vgl. den Satz 3 S. 125). Es erübrigt sich also, hierauf näher einzugehen.

Wir wenden uns nun zu der *Trigonometrie der hyperbolischen Ebene.*[1]) Hier werden wir auch erst das *rechtwinklige* Dreieck ABC mit dem rechten Winkel γ behandeln und dieses in derselben Weise wie vorhin im projektiven Koordinatensystem gelegen sein lassen (vgl. Fig. 148 S. 173). Wollen wir dann auch hier zunächst die Seiten und Winkel des Dreiecks aus den Koordinaten seiner Eckpunkte berechnen, so haben wir ganz analog zu verfahren wie in der elliptischen Geometrie. Der Unterschied der Rechnung besteht allein darin, daß jetzt $+\varkappa$ an die Stelle von $-\varkappa$ und μi an die Stelle von μ tritt (vgl. die Formel (16) S. 97 und die Gleichungen (13a, b, c) S. 96 sowie die Formeln (12a, b) S. 109 und die Gleichungen (5a, b, c) S. 107). Es ergibt sich jetzt also analog den Gleichungen (13a, b, c)

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mu} &= \log \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa}+y}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa}-y}}, \\ \frac{b}{\mu} &= \log \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa}+x}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa}-x}}, \\ \frac{c}{\mu} &= \log \frac{\sqrt{\varkappa+\sqrt{\varkappa(x^2+y^2)-x^2y^2}}}{\sqrt{\varkappa-\sqrt{\varkappa(x^2+y^2)-x^2y^2}}}. \end{aligned} \qquad (19\text{a, b, c})$$

Hieraus folgt jetzt z. B. $$e^{\frac{a}{\mu}} = \frac{\sqrt{\sqrt{\varkappa}+y}}{\sqrt{\sqrt{\varkappa}-y}}.$$

Nun führen wir die Hyperbelfunktionen[2]) ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sinh\psi &= \frac{e^{\psi}-e^{-\psi}}{2}, \\ \cosh\psi &= \frac{e^{\psi}+e^{-\psi}}{2}, \\ \operatorname{tgh}\psi &= \frac{1}{\operatorname{ctgh}\psi} = \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi}. \end{aligned} \qquad (20\text{a, b, c})$$

Es ist also $$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1. \qquad (20\text{d})$$

1) Hinsichtlich der Geschichte dieser Trigonometrie ist besonders auf die Schrift von F. A. Taurinus (1794—1874) zu verweisen: Geometriae prima elementa, Köln 1826, in der bereits die Formeln der hyperbolischen Trigonometrie entwickelt werden. Näheres hierüber gibt das bereits oft genannte Werk: R. Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908, S. 79ff.

2) Als Literatur sei angeführt: S. Günther, Die Lehre von den gewöhnlichen und den verallgemeinerten Hyperbelfunktionen, Halle a. S. 1881, sowie: L. Schrutka, Elemente der höheren Mathematik, Wien 1924, 4. Aufl., S. 271ff. und die Tafeln in dem Taschenbuch für Ingenieure „Hütte", Bd. I, sowie in dem Werk: C. Burrau, Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus, Leipzig 1907.

Nebenbei sei bemerkt, daß die Kurve, die in rechtwinkligen (ξ, η)-Koordinaten durch die Gleichungen mit den Parametern ψ gegeben ist,

$$\xi = \cosh \psi,$$
$$\eta = \sinh \psi$$

eine gleichseitige Hyperbel ist, woher der Name für die Funktionen stammt.

Für diese Funktionen gelten übrigens folgende Reihenentwicklungen:

Es ist ja $$e^{\psi} = 1 + \frac{\psi}{1!} + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^3}{3!} + \cdots$$

also ist $$\sinh \psi = \frac{\psi}{1!} + \frac{\psi^3}{3!} + \cdots,$$
$$\cosh \psi = 1 + \frac{\psi^2}{2!} + \frac{\psi^4}{4!} + \cdots$$

Es ist jetzt $$\cosh \frac{a}{\mu} = \frac{e^{\frac{a}{\mu}} + e^{-\frac{a}{\mu}}}{2} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa - y^2}}, \qquad (21\text{ a, b})$$
$$\sinh \frac{a}{\mu} = \frac{y}{\sqrt{\varkappa - y^2}}.$$

Analog wird $$\cosh \frac{b}{\mu} = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa - x^2}}, \qquad (22\text{ a, b})$$
$$\sinh \frac{b}{\mu} = \frac{x}{\sqrt{\varkappa - x^2}}$$

und $$\cosh \frac{c}{\mu} = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa - x^2}\sqrt{\varkappa - y^2}} \qquad (23\text{ a, b})$$
$$\sinh \frac{c}{\mu} = \frac{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) - x^2 y^2}}{\sqrt{\varkappa - x^2}\sqrt{\varkappa - y^2}}.$$

Ferner ergibt sich gemäß den Formeln (12 a, b) S. 109

$$\cos \alpha = \frac{x\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) - x^2 y^2}}, \qquad (24\text{ a, b})$$
$$\sin \alpha = \frac{y\sqrt{\varkappa - x^2}}{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) - x^2 y^2}}$$

und $$\cos \beta = \frac{y\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) - x^2 y^2}}, \qquad (25\text{ a, b})$$
$$\sin \beta = \frac{x\sqrt{\varkappa - y^2}}{\sqrt{\varkappa(x^2 + y^2) - x^2 y^2}}$$

Nun ist es leicht, folgendes Resultat zu gewinnen:

4. *Die trigonometrischen Formeln für das rechtwinklige Dreieck der hyperbolischen Geometrie lauten:*

$$\sinh\frac{a}{\mu} = \sinh\frac{c}{\mu}\sin\alpha\,, \tag{26}$$

$$\cos\alpha = \cosh\frac{a}{\mu}\sin\beta\,, \tag{27}$$

$$\sinh\frac{a}{\mu} = \operatorname{tgh}\frac{b}{\mu}\operatorname{ctg}\beta\,, \tag{28}$$

$$\cos\beta = \operatorname{ctgh}\frac{c}{\mu}\operatorname{ctgh}\frac{a}{\mu}\,, \tag{29}$$

$$\cosh\frac{c}{\mu} = \cosh\frac{a}{\mu}\cosh\frac{b}{\mu}\,, \tag{30}$$

$$\cosh\frac{c}{\mu} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\,. \tag{31}$$

Für das *allgemeine Dreieck ABC* der hyperbolischen Geometrie erhalten wir dann ebenfalls die trigonometrischen Formeln einfach dadurch, daß wir das Dreieck ABC durch eine zweckmäßig gewählte Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegen und dann aus den Formeln für letztere die neuen Formeln für das allgemeine Dreieck berechnen. Hierzu ist nur notwendig, die Formeln anzuwenden

$$\cosh(\varphi \pm \psi) = \cosh\varphi\cosh\psi \pm \sinh\varphi\sinh\psi,$$

$$\sinh(\varphi \pm \psi) = \sinh\varphi\cosh\psi \pm \cosh\varphi\sinh\psi,$$

die leicht aus den Definitionsgleichungen (20a, b) zu gewinnen sind.

5. *Es ergeben sich dann die Formeln der hyperbolischen Geometrie:*

der Sinussatz:

$$\sinh\frac{a}{\mu} : \sinh\frac{b}{\mu} : \sinh\frac{c}{\mu} = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma, \tag{32}$$

der Seitenkosinussatz:

$$\cosh\frac{a}{\mu} = \cosh\frac{b}{\mu}\cosh\frac{c}{\mu} - \sinh\frac{b}{\mu}\sinh\frac{c}{\mu}\cos\alpha, \tag{33}$$

der Winkelkosinussatz:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cosh\frac{a}{\mu}\cdot \tag{34}$$

Die Formeln der hyperbolischen Geometrie unterscheiden sich also von denen der elliptischen Geometrie nur dadurch, daß μ durch μi ersetzt ist. Es gehen ja z. B. die Ausdrücke $\cos\frac{a}{\mu'}$ und $\sin\frac{a}{\mu'}$, wenn wir $\mu' = \mu i$ setzen, in die Ausdrücke über

$$\cos\frac{a}{\mu i} = \cos\frac{ai}{\mu} = \cosh\frac{a}{\mu}\,, \tag{35}$$

$$\sin\frac{a}{\mu i} = \quad \sin\frac{ai}{\mu} = -i\sinh\frac{a}{\mu}\,, \tag{36}$$

da ja
$$\cos(\psi i) = \frac{e^{\psi} + e^{-\psi}}{2} = \cosh \psi$$
und
$$\sin(\psi i) = i\,\frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{2} = i \sinh \psi \quad \text{ist.}$$

Wir können auch wohl sagen, da ja die Größe μ der elliptischen Geometrie vergleichbar dem Radius r der Kugel für die sphärische Geometrie ist:

6. Die Formeln der hyperbolischen Geometrie stellen auch die Trigonometrie für eine Kugel mit imaginärem Radius $ri = \mu i$ dar.[1])

Auch die Formeln der hyperbolischen Geometrie gehen demgemäß in solche der euklidischen Geometrie über, wenn wir $\lim \varkappa = \infty$ und damit zugleich $\lim \mu = \infty$ werden lassen.

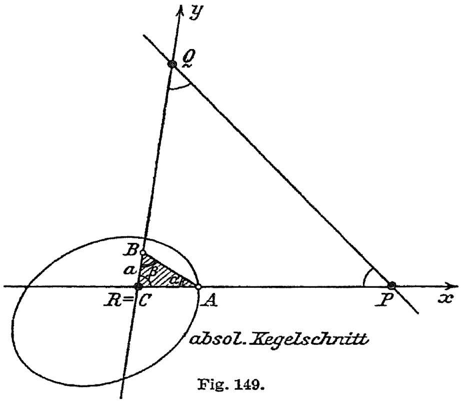


Fig. 149.

Wir wollen noch sogleich eine Anwendung der trigonometrischen Formeln auf das rechtwinklige Dreieck machen. Wir betrachten das rechtwinklige Dreieck ABC mit $\sphericalangle \gamma = \frac{\pi}{2}$, dessen Ecke A im Unendlichen, d. h. auf dem absoluten Kegelschnitt gelegen ist (Fig. 149). Es ist dann der Winkel $\alpha = 0$. Aus der Gleichung (27) folgt dann

$$\sin \beta = \frac{1}{\cosh \frac{a}{\mu}}, \tag{37}$$

oder, da
$$\sin \beta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{ist,}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} - 2 \cosh \frac{a}{\mu} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + 1 = 0$$

oder, im Hinblick auf die Formel (20 d),
$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \cosh \frac{a}{\mu} \pm \sinh \frac{a}{\mu}$$

oder, gemäß den Formeln (20 a, b),
$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = e \tag{37'}$$

1) Es sei auch auf meine in Kürze erscheinende, besondere Schrift hingewiesen: Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie.

da das $+$-Zeichen im Exponenten der rechten Seite wegen der Bedingung, daß $\sphericalangle \beta < \frac{\pi}{2}$ ist, ausgeschlossen ist.

Der Winkel β ist der Winkel, unter dem die beiden Parallelen durch einen Punkt B zu einer Geraden, hier der Geraden AC, gegen das Lot BC auf der Geraden geneigt sind. Dieser Winkel hat in der Entwicklung der hyperbolischen Geometrie seit Lobatschefskij eine bedeutende Rolle gespielt. Lobatschefskij nennt diesen Winkel den *Parallelwinkel des Abstandes a und bezeichnet ihn mit* $\Pi(a)$ (früher auch mit $F(a)$).

7. *Die Formel* (37) *oder* (37') *bestimmt dann den Parallelwinkel* $\beta = \Pi(a)$ *in seiner funktionellen Abhängigkeit von dem Abstande a.*[1])

Natürlich hätten wir die Formeln (37) und (37') auch bereits im Anschluß an die Entwicklungen des § 22 S. 106 ff. ableiten können.

§ 33. Der Dreiecksinhalt in der elliptischen Geometrie.

Nun müssen wir uns der wichtigen Frage zuwenden, wie wir für den *Inhalt eines Dreiecks in der elliptischen und der hyperbolischen Geometrie* eine Formel gewinnen. Die Lehre vom Flächeninhalt in der Ebene, besonders für Polygone, hat zu weitgehenden axiomatischen Untersuchungen Veranlassung gegeben. Insbesondere handelt es sich z. B. darum, ob etwa die Lehre vom Flächeninhalt in der Ebene ohne Benutzung eines Stetigkeitsaxioms und eines Parallelenaxioms entwickelt werden kann. Solchen axiomatischen Betrachtungen hier nachzugehen, würde für uns ja bedeuten, unseren geraden Weg zu verlassen. Wir setzen selbstverständlich im folgenden alle bisher eingeführten Axiome und die aus ihnen gewonnenen Sätze voraus und verweisen im übrigen wegen der angedeuteten, gewiß sehr interessanten speziellen Untersuchungen auf die Literatur.[2])

1) Vgl. deswegen: N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen (Kasan 1829 und 1830), aus dem Russischen übersetzt von Fr. Engel, I. und II. Teil, Leipzig 1898 und 1899, S. 11 ff., S. 167 ff., S. 207 ff. und S. 345 ff., insbesondere die mit unserer Gleichung (37') identische Gleichung (62) S. 240, sowie N. I. Lobatschefskij, Pangeometrie (Kasan 1856), übersetzt von H. Liebmann, 2. Aufl., Leipzig 1902 (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 130), § 2 und § 3, sowie H. Liebmann, Elementare Ableitung der nichteuklidischen Trigonometrie (eben mit ausgiebiger Benutzung des Parallelwinkels), Berichte der K. S. G. der Wissenschaft, Math.-phys. Klasse, Leipzig 1907, Bd. 59, S. 187 ff.

2) Es sei hier genannt: D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Kap. IV: Die Lehre von den Flächeninhalten in der Ebene, Leipzig, 7. Aufl., 1930, S. 69—82; M. Dehn, Über den Inhalt sphärischer Dreiecke, Math. Ann. Bd. 60, 1905, S. 166, sowie die von Herrn F. Schur angeregte Straßburger Dissertation: A. Finsel, Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie, Leipzig 1911; ferner M. Pasch und M. Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1926, S. 262—271, sowie H. v. Mangoldt, Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. III, 3. Teil, S. 59—68.

Wir werden zunächst die folgenden (für die euklidische wie die beiden nichteuklidischen Geometrien gültigen) Definitionen aufstellen:

1. Zwei Polygone heißen z e r l e g u n g s g l e i c h, *wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander kongruent sind.*

2. Zwei Polygone heißen e r g ä n z u n g s g l e i c h, *wenn es möglich ist, zu ihnen zerlegungsgleiche Polygone so hinzuzufügen, daß die beiden zusammengesetzten Polygone mit einander zerlegungsgleich sind.*

3. Zwei Polygone heißen i n h a l t s g l e i c h *(d. h. sie haben denselben Inhalt), wenn sie zerlegungsgleich oder ergänzungsgleich sind.*

Im folgenden werden wir allerdings von der Definition 2 keinen Gebrauch machen.

Um aber auch anschaulich unsere Betrachtungen zu beherrschen, wollen wir sogleich die beiden nichteuklidischen Geometrien einzeln nacheinander behandeln. Wir wenden uns zunächst zur *elliptischen* Geometrie, in der die Verhältnisse einfacher liegen. Es sei jetzt ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ gegeben (Fig. 150). Wir verbinden die Mittelpunkte L, M der Seiten AB und AC, verlängern LM über M um sich selbst bis N und verbinden N mit C. Dann ist $\triangle LMA \cong \triangle NMC$, d. h. das Dreieck ABC und das Viereck $LNCB$ sind zerlegungsgleich und damit auch inhaltsgleich. Wir definieren nun allgemein für jedes Dreieck und jedes Polygon:

4. Wir bezeichnen als E x z e ß e i n e s D r e i e c k s *die Differenz $(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ und als Exzeß eines Polygons mit n Ecken $(\alpha + \beta + \gamma + \cdots) - (n - 2)\pi$, wo wieder α, β, γ, . . . die Winkel des Polygons bezeichnen, also den Überschuß der Winkelsumme über $(n - 2)\pi$.*

Wir erkennen sofort:

5. Das Dreieck ABC und das Viereck $LNCB$ haben denselben Exzeß.

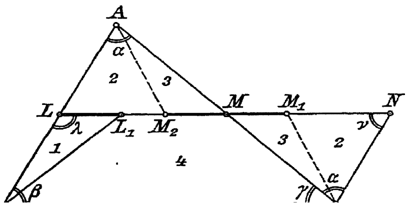


Fig. 150.

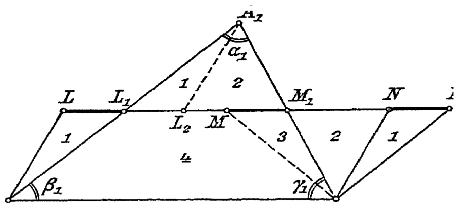


Fig. 151.

Das Viereck $LNCB$ hat überdies folgende Eigenschaften: *Die Winkel an den Ecken L, N betragen zusammen π, während die Seite LB gleich der Seite NC ist.* (Die Seite LN ist gleich der doppelten Mittellinie LM des Dreiecks ABC; der Winkel $B\widehat{C}N$ kann eventuell größer als π sein.)

Nun tragen wir auf der Geraden LN von L, M und N gleiche Strecken $LL_1 = MM_1 = NN_1$ ab, wobei wir $LL_1 < LM$ voraussetzen, und überdies so klein, daß $\sphericalangle B\widehat{C}M_1 < \pi$ ist. Diese Strecken wollen wir als *Verschiebungsstrecken* bezeichnen (Fig. 151). Es ist dann in der Fig. 151 $\triangle BLL_1 \cong \triangle CNN_1$, also $BL_1 = CN_1$. Ferner ist auch $L_1M_1 = M_1N_1$. Wir denken nun das Dreieck M_1N_1C durch halbe Umdrehung um M_1 in das Dreieck $M_1L_1A_1$ übergeführt. Dann liegen ersichtlich die Punkte A_1, L_1, B und A_1, M_1, C je in einer Geraden und es ist wieder L_1M_1 die Mittellinie des Dreiecks A_1BC. Wir erkennen weiter leicht:

Auch die Dreiecke ABC und A_1BC sind zerlegungsgleich. Denn in den Fig. 150 und 151, in denen noch $MM_1 = MM_2$ und $LL_1 = L_1L_2$ gemacht ist, sind die mit gleichen Ziffern bezeichneten Flächenstücke stets kongruent; die beiden Vierecke 4 können wir natürlich noch durch je eine Diagonale in paarweise kongruente Dreiecke zerlegen. Ferner bemerken wir noch: *Die Dreiecke ABC und A_1BC haben auch denselben Exzeß.* Denn es haben ja die Vierecke $LNCB$ und L_1N_1CB (Fig. 151) denselben Exzeß.

Dieses Verfahren können wir nun eventuell von dem zweiten Dreieck A_1BC ausgehend noch einmal ausführen, so daß wir mit der Verschiebungsstrecke $L_1L_2 = M_1M_2 = N_1N_2$ zu dem dritten Dreieck A_2BC und dem dritten Viereck L_2N_2CB gelangen. Es sind dann auch die Dreiecke A_1BC und A_2BC zerlegungsgleich und sie besitzen gleichen Exzeß. Wir schließen nun weiter:

Dann sind auch die Dreiecke ABC und A_2BC zerlegungsgleich, und sie besitzen auch gleichen Exzeß.

Was die Zerlegungsgleichheit betrifft, so können wir ja die zweifache Zerlegung, welche das zweite Dreieck je mit dem ersten und mit dem dritten Dreieck verknüpft, zugleich vorhanden denken. Und diese gesamte Zerlegung können wir sofort auch auf das erste und dritte Dreieck übertragen, indem wir z. B. die weitere Zerlegung des Gebietes 4 der Fig. 151 auch in die Fig. 150 übertragen. Hierdurch sind ersichtlich nun alle drei Dreiecke in paarweise kongruente Gebiete eingeteilt, also unter sich zerlegungsgleich.

Ersichtlich gilt analog der allgemeine Satz:

6. *Sind zwei Dreiecke demselben dritten Dreieck zerlegungsgleich, so sind auch die beiden ersten Dreiecke zueinander zerlegungsgleich.*

Nun sei von dem ursprünglichen Dreieck ABC ausgehend eine solche *beliebige* Verschiebungsstrecke von L, M, N aus auf der Mittellinie bis L_0, M_0, N_0 abgetragen, so daß das Dreieck A_0BC entsteht (Fig. 152). Dann können wir ja den Übergang vom Dreieck ABC zum Dreieck A_0BC in einzelne Schritte zerlegen. Es sei eben LL_0 etwa in n gleiche Teile $LL_1, L_1L_2, \ldots, L_{n-1}L_0$ zerlegt, so daß $LL_1 < LM$ ist. (Wir bemerken, daß hierbei der Archimedische

Stetigkeitssatz zur Anwendung gelangt, vgl. den Satz 7 S. 25.) Nacheinander sei dann das Dreieck ABC in das Dreieck A_1BC, A_2BC ... bis A_0BC übergeführt. Wir erkennen somit leicht:

7. Je zwei in der angegebenen Weise auseinander konstruierte Dreiecke ABC und A_0BC sind miteinander zerlegungsgleich und haben denselben Exzeß.

Wir wollen nun aber noch die Umkehrung beweisen:

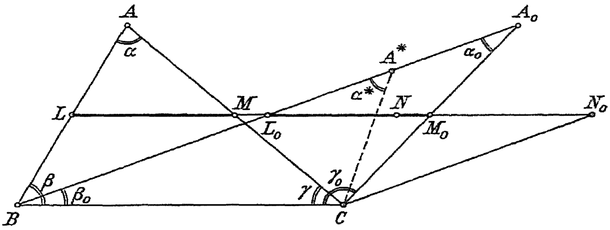


Fig. 152.

8. Je zwei Dreiecke ABC und A_0BC mit derselben Grundlinie BC und demselben Exzeß ε lassen sich in der soeben angegebenen Weise aus einander konstruieren und sind demgemäß auch zerlegungsgleich.

Zum Beweise denken wir das Dreieck A_0BC sogleich so auf dem Dreieck ABC liegend, daß die Ecken B, C beider Dreiecke zusammenfallen und der Winkel β_0 auf derselben Seite von BC liegt, wie der Winkel β (Fig. 152). In jedem Dreieck der elliptischen Geometrie ist aber jeder Winkel größer als $\frac{\varepsilon}{2}$. (Es ist in dem Dreieck ABC ja $\alpha + \beta + \gamma - \pi = \varepsilon$, aber in dem z. B. an die Seite AC anstoßenden, von denselben Geraden gebildeten Dreieck $[(\pi - \alpha) + (\pi - \gamma) + \beta - \pi] > 0$ oder $\pi + \beta - (\alpha + \gamma) = \pi + \beta - (\pi + \varepsilon - \beta) > 0$, d. h. $\beta > \frac{\varepsilon}{2}$.) Wir können also stets nach dem Vorstehenden ein Dreieck A^*BC über der Seite BC konstruieren, dessen Winkel $A^*\widehat{B}C = \beta_0$ ist und das denselben Exzeß ε besitzt (vgl. die Betrachtung im Anschluß an den Satz 9). Es müssen aber notwendig die Punkte A_0 und A^* zusammenfallen. (Denn würde A^* von A_0 verschieden sein, z. B. auf der Seite A_0B selbst liegen, so kann ersichtlich der Winkel α^* nicht gleich $\alpha_0 + \sphericalangle A_0\widehat{C}A^*$ sein.)

Hierzu wollen wir noch folgende wichtige Bemerkung hinzufügen: Wenn wir zu den Figuren 150 und 151 zurückblicken, so erkennen wir: Die Punkte A und A_1 haben denselben Abstand von der Mittellinie LM. Folglich gewinnen wir leicht sogleich den Satz:

9. Der geometrische Ort der Eckpunkte A_0 aller Dreiecke, die mit einem gegebenen Dreieck ABC die Seite BC gemeinsam haben, auf derselben Seite von BC liegen und denselben Exzeß besitzen, ist die Äquidistante zu der Mittellinie LM durch den Punkt A, d. h. der Kreis um den absoluten Pol von LM durch A (vgl. Satz 2 S. 146). *Diese Äquidistante geht dann durch die Punkte B, C.*[1])

1) Vgl. deswegen auch den entsprechenden Satz von Gauß für die sphärischen Dreiecke, Werke Bd. VIII, S. 292ff.

Es ist nicht so leicht, sich anschaulich die Veränderung der Dreiecke vorzustellen, wenn der Eckpunkt A_0 die Äquidistante durchläuft, von der übrigens nur der eine Bogen $\widehat{BC}$ in Betracht kommt. Jedenfalls geht z. B. das Dreieck A_0BC, wenn A_0 in den Punkt B hineinrückt, in ein *Zweieck* über mit dem Winkel $\frac{\varepsilon}{2}$ an der Ecke $A_0 = B$, da ja der Winkel an der Ecke C gleich π wird (Fig. 153a). Würde der Punkt A_0 aber noch weiter über B hinaus wandern, so würde ein Dreieck sich ergeben, das an der Ecke C einen Winkel $> \pi$ besäße, was wir ja grundsätzlich ausschließen (Fig. 153b). Es ergibt sich also der Satz:

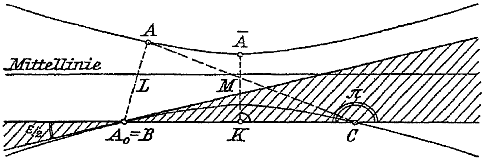


Fig. 153a.

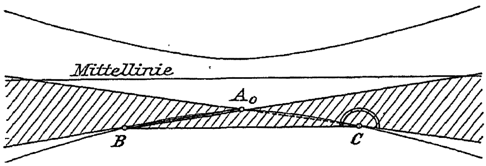


Fig. 153b.

Der Winkel an der Ecke B (oder C) hat bei der Wanderung des Punktes A auf der Äquidistanten zur Mittellinie als obere Grenze π und als untere Grenze die Hälfte des Exzesses ε.

Man überzeugt sich leicht, daß dieses Resultat für jedes Ausgangsdreieck ABC gilt, wenn man bedenkt: Keine der Ecken A, B, C kann der absolute Pol der Mittellinie LM sein und die Seite BC des Dreiecks ABC ist stets eine Sehne der Äquidistante, die Seite AB oder AC aber nicht.

Wir denken weiter im Mittelpunkt K von BC in der Fig. 153a die Senkrechte auf der Seite BC bis zum Schnitt $\bar{A}$ mit dem in Betracht kommenden Bogen $\widehat{BC}$ der Äquidistante errichtet und den Punkt A bis zum Punkte $\bar{A}$ verschoben, so daß jetzt das gleichschenklige Dreieck $\bar{A}BC$ entsteht. Es gilt dann:

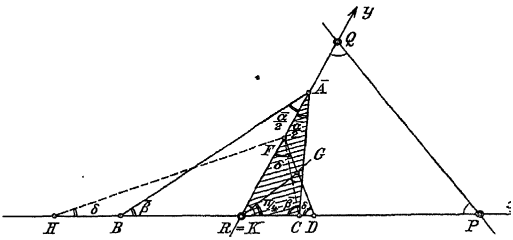


Fig. 154.

10. Das gleichschenklige Dreieck $\bar{A}BC$ ist mit dem ursprünglichen Dreieck ABC zerlegungsgleich und exzeßgleich.

Es ist also auch $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\bar{\alpha}}{2} + \bar{\beta}$, wo $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$ die Winkel des gleichschenkligen Dreiecks sind. Dieses Dreieck $\bar{A}BC$ wollen wir aber noch weiter umformen: Am besten werden wir es jetzt in dem projektiven Koordinatensystem so gelegen annehmen, daß die Strecken KC und $K\bar{A}$ in die positiven Richtungen der (x, y)-Achsen fallen (Fig. 154). Nun soll die Hälfte $KC\bar{A}$ in ein ebenfalls

in der Koordinatenecke liegendes, zerlegungsgleiches und exzeßgleiches *gleichschenkliges* Dreieck KDF umgeformt werden. Es muß dann also der Winkel $K\widehat{D}F = \delta = \frac{\bar{\alpha}}{4} + \frac{\bar{\beta}}{2} = \frac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma)$ sein, wo also $\frac{\pi}{4} < \delta < \frac{3\pi}{4}$ gilt, da ja $\pi < (\alpha + \beta + \gamma) < 3\pi$ ist (vgl. S. 128). Wir wollen zunächst ein in der Koordinatenecke liegendes gleichschenkliges Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, δ, δ konstruieren und dann zeigen, daß dieses Dreieck KDF zugleich auch zerlegungsgleich mit dem Dreieck $KC\bar{A}$ ist. Wir denken noch das Dreieck KDF durch die Höhe KG zur Basis in zwei rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{4}$ und δ an der Hypotenuse zerlegt. Nach der trigonometrischen Formel (6) S. 171 (für $r = \mu$, $c < \lambda = \mu\pi$, vgl. den Satz 3 S. 115) ist ja sofort die Hypotenuse RD eindeutig bestimmt. Doch können wir auch eine rein geometrische Konstruktion der Hypotenuse ausführen: Es sei in der Fig. 155, in der PQR wieder unser (dreifach rechtwinkliges) Fundamentaldreieck des projektiven Koordinatensystems sei, die Winkelhalbierende RU des rechten Winkels $P\widehat{R}Q$ sowie deren Pol V gezeichnet. In einem beliebigen Punkte D_0 der x-Achse sei der Winkel δ nach der richtigen Seite angetragen und um den Punkt Q dann der Kreis beschrieben, der den freien Schenkel des angetragenen Winkels δ berührt. Die eine Tangente von V an diesen Kreis liefert das gesuchte Dreieck RDG (vgl. den Satz 12, S. 156). (Die andere Tangente von V liefert ein nicht weiter in Betracht kommendes kongruentes Dreieck RD_1G_1; beide Dreiecke gehen eben durch Umwendung um R ineinander über.)

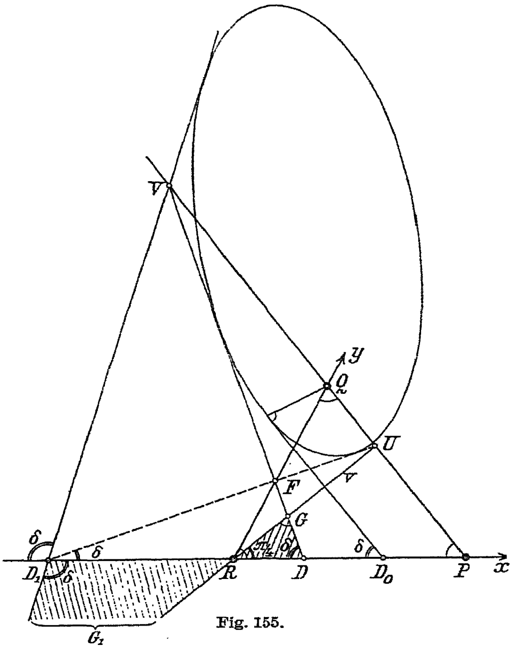


Fig. 155.

Blicken wir nun zur Fig. 154 zurück, so muß von den Eckpunkten D, F einer auf der zugehörigen Seite des Dreiecks $KC\bar{A}$, der andere außerhalb der zugehörigen Seite liegen. Denn wenn z. B. die Eckpunkte D, F beide bzw. auf den Seiten KD und $K\bar{A}$ lägen, so würde das Dreieck KDF kleineren Exzeß

haben als das Dreieck $KC\bar{A}$ (Fig. 156), da das Dreieck KDF dann kleineren Exzeß als das Dreieck $KD\bar{A}$ und dieses kleineren Exzeß als das Dreieck $KC\bar{A}$ hätte. (Denn die Summe der Exzesse der beiden Dreiecke KDF und $DF\bar{A}$ z. B. ist ja gleich dem Exzeß des Dreiecks $KD\bar{A}$.) Wir nehmen z. B. an, daß die Ecke F auf der Seite $K\bar{A}$ liegt (Fig. 154). Dann aber ist das Dreieck KDF auch zerlegungsgleich mit dem Dreieck $KC\bar{A}$, da dies für die beiden ersichtlich auch exzeßgleichen Dreiecke CFD und $CF\bar{A}$ mit derselben Grundlinie CF nach dem Satze 8 gilt.

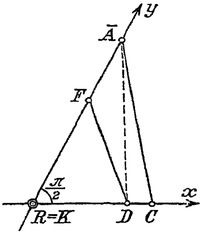


Fig. 156.

Wir gewinnen somit weiter den Satz:

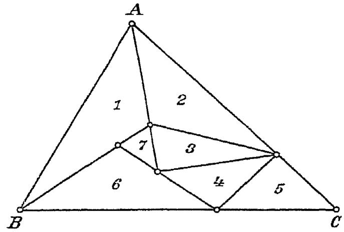


Fig. 157.

11. Wir können jedes gegebene Dreieck ABC in ein zerlegungsgleiches und exzeßgleiches gleichschenkliges Dreieck FDH (Fig. 154) *umwandeln, dessen Höhe RF zur Basis gleich der halben Basis ist.*

Hiermit ist aber der allgemeine Satz bewiesen:

12. Je zwei exzeßgleiche Dreiecke sind auch zerlegungsgleich.

Denn jedes dieser Dreiecke ist zerlegungsgleich mit dem gleichschenkligen Dreieck, dessen Höhe gleich der halben Basis und dessen Basiswinkel δ gleich dem vierten Teil der Winkelsumme jedes der gegebenen Dreiecke ist.

Natürlich gilt auch, wie wir uns leicht überzeugen, der umgekehrte allgemeine Satz:

13. Je zwei zerlegungsgleiche Dreiecke sind auch exzeßgleich.

Denn es gilt auch der Satz:

14. Jedes in einzelne Dreiecke zerlegte Dreieck hat einen Exzeß, der gleich der Summe der Exzesse aller Teildreiecke ist.

Es sei empfohlen, diesen Satz z. B. an der Einteilung des Dreiecks ABC in sieben Teildreiecke in der Fig. 157 zu beweisen, und dementsprechend den allgemeinen Beweis des Satzes sich klar zu machen.

Es gilt nun auch der Satz:

15. Von zwei nicht exzeßgleichen Dreiecken ist nur das Dreieck mit kleinerem Exzeß inhaltsgleich mit einem Teildreieck des anderen.

Demgemäß stellen wir die Definition auf:

16. Von zwei nicht exzeßgleichen Dreiecken nennen wir dasjenige Dreieck k l e i n e r *als das andere, dessen Exzeß kleiner ist.*

§ 34. Das Inhaltsmaß der Dreiecke in der elliptischen Geometrie.

Nun aber gehen wir dazu über, für den Inhalt eines Dreiecks ein bestimmtes *Inhaltsmaß* (eine Maßzahl für den Inhalt) *in anschaulicher Weise* zu entwickeln, gemäß der Definition 3 S. 181. Hierbei werden also zwei exzeßgleiche Dreiecke dasselbe Inhaltsmaß bekommen müssen gemäß dem Satze 12 S. 186, dagegen zwei nichtexzeßgleiche Dreiecke verschiedenes Inhaltsmaß, und zwar das kleinere Dreieck das kleinere Inhaltsmaß. Auch muß das Inhaltsmaß eines Dreiecks gleich der Summe der Inhaltsmaße seiner Teildreiecke sein, entsprechend dem Satze 14 S. 186. (Unsere Ausführungen stehen in engster Beziehung zu der analogen Ableitung des Inhaltsmaßes für ein sphärisches Dreieck.)

Wir wollen nun der gesamten Ebene als *Inhaltsmaß* die Zahl $2\pi\mu^2$ zuschreiben und diese Zahl unserer weiteren Betrachtung zugrunde legen. (Der Faktor μ^2 ist deswegen hinzugefügt, damit wir auch den Grenzübergang zur euklidischen Geometrie leicht gewinnen, überhaupt den verschiedenen möglichen elliptischen Geometrien Rechnung tragen.) Durch zwei zueinander senkrechte Geraden wird ja die Ebene in zwei kongruente Teile, rechtwinklige Zweiecke, zerlegt. Das Inhaltsmaß jeder dieser Teile ist also $\pi\mu^2$. Jedes dieser rechtwinkligen Zweiecke wollen wir durch die Halbierungslinie seines Winkels wieder in zwei kongruente Teile zerlegt denken. Nach wiederholter solcher Halbierung sei ein Zweieck mit dem Winkel $\frac{\pi}{2^n}$ erhalten, wo n eine positive ganze Zahl ist (Fig. 158, für $n = 3$). Als Inhaltsmaß eines solchen Zweiecks gilt dann die Zahl $\frac{2\pi}{2^n}\mu^2$. Ferner gilt als Inhaltsmaß eines Zweiecks mit dem Winkel $m\frac{\pi}{2^n}$, wo m eine positive ganze Zahl und $\leqq 2^n$ sei, die Zahl $\frac{2m\pi}{2^n}\mu^2$. Ein solches Zweieck wollen wir als ein *dyadisch-rationales* Zweieck bezeichnen. Für ein Zweieck mit dem beliebigen (im Bogenmaß gemessenen) Winkel α erhalten wir dann als Inhaltsmaß die Zahl $2\alpha\mu^2$, da ja dieses Zweieck sich durch zwei dyadisch-rationale Zweiecke mit den Winkeln $m\frac{\pi}{2^n}$ und $(m+1)\frac{\pi}{2^n}$ einschließen läßt, wo wir n beliebig groß wählen können. (Wenn wir wollten, hätten wir ja auch statt jedes Zweiecks mit dem Winkel α seine Hälfte, das Dreieck mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, α, das durch die absolute Polare des Scheitelpunktes des Zweiecks abgeschnitten wird, unserer vorstehenden Betrachtung zugrunde legen können. Die Anwendung des allgemeinen 9. Grundsatzes von Euklid: Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile, ist hier durch die früheren Entwicklungen ausgeschaltet.)[1]

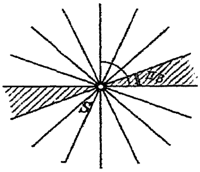


Fig. 158.

1) Vgl. deswegen Pasch und Dehn, a. a. O. S. 263, Nr. 3.

Es sei nun endlich ein beliebiges Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ gegeben (Fig. 159). Wir können dann die Zweiecke mit den Winkeln α bzw. β und γ betrachten. Diese drei Zweiecke zusammen erfüllen die ganze Ebene und außerdem noch das doppelte Dreieck ABC. Bezeichnen wir das Inhaltsmaß des Dreiecks ABC mit J_Δ, so gilt

$$2(\alpha + \beta + \gamma)\mu^2 = 2\pi\mu^2 + 2J_\Delta$$

oder

$$J_\Delta = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\mu^2. \tag{1}$$

Wir haben also erhalten:

1. Das Inhaltsmaß des Dreiecks ABC ist gleich dem Produkt aus dem Exzeß des Dreiecks und dem Quadrat der Weltmaßstrecke (oder dem absoluten reziproken Werte der Krümmung, vgl. S. 118, sowie die Formel für den Inhalt eines sphärischen Dreiecks auf der Kugel mit dem Radius $r = \mu$).

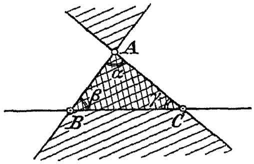


Fig. 159.

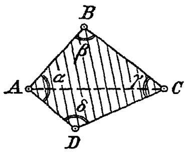


Fig. 160.

Es folgt weiter sogleich:

2. Das Inhaltsmaß eines Vierecks $ABCD$ mit den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ist gleich $[(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 2\pi]\mu^2$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Exzeß des Vierecks und dem Quadrat der Weltmaßstrecke (Fig. 160).

3. Das Inhaltsmaß eines Polygons (einer Polygonfläche) mit den n Ecken $A, B, C, D, \ldots$ und den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ ist gleich dem Produkt $[(\alpha + \beta + \gamma \ldots) - (n-2)\pi]\mu^2$.

Wir können ja das Polygon stets durch geeignet gezogene Verbindungslinien in einzelne Dreiecke zerlegt denken.

Jetzt wollen wir jedoch sehen, wie wir uns von einem *Dreieck mit dem Inhaltsmaß 1* (also von der Flächeneinheit) eine anschauliche Vorstellung schaffen können. Demgemäß betrachten wir im Anschluß an den Satz 11 S. 186 weiter das gleichschenklige Dreieck FDH, dessen Höhe RF zur Basis gleich der halben Basis ist (Fig. 154, S. 184). Der Basiswinkel sei wieder mit δ bezeichnet. Die Punkte D, F mögen die Abszisse bzw. Ordinate $\bar{x} = \bar{y}$ besitzen. Dann hat die Gerade DF die homogenen Linienkoordinaten

$$(u_1, v_1, t_1) = (1, 1, -\bar{x}).$$

Die Linienkoordinaten der x-Achse aber sind ja

$$(u_2, v_2, t_2) = (0, 1, 0).$$

Also ist nach der Formel (26b) S. 119

$$\sin\delta = \sqrt{\alpha\beta - \gamma^2} = \frac{\sqrt{\varkappa + \bar{x}^2}}{\sqrt{2\varkappa + \bar{x}^2}} \tag{2}$$

oder
$$\bar{x}^2 = \cdot\ \ \cdot\ \varkappa \frac{\cos 2\delta}{\cos^2\delta} > 0, \tag{2a}$$

wo
$$\frac{\pi}{4} < \delta < \frac{3\pi}{4}$$

und zwar $\frac{\pi}{4} < \delta \leqq \frac{\pi}{2}$ für $0 < \bar{x} \leqq +\infty$ und $\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{3\pi}{4}$ für $\bar{x} < 0$ ist.

Diese Formeln bestimmen den Winkel δ als Funktion der Größe $\bar{x}$ und umgekehrt.

Soll nun das Dreieck FDH die Einheitsfläche sein, so folgt zunächst, da ja $(4\delta - \pi)$ der Exzeß des Dreiecks ist, aus der Gleichung

$$(4\delta - \pi)\mu^2 = 1,$$

$$\delta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\mu^2} \tag{3}$$

ist. Die Gleichung (2a) aber ergibt

$$\bar{x}^2 = \varkappa \frac{\overline{2\mu^2}}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\mu^2}\right)}, \tag{4}$$

d. h.:

4. Die Einheitsfläche wird durch dasjenige Dreieck FDH gegeben, dessen Winkel $\delta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\mu^2}$ ist und dessen Eckpunkt D die durch die Gleichung (4) *bestimmte Abszisse $\bar{x}$ besitzt.*

Für einen sehr großen Wert $\varkappa$, für den dann $\mu = \sqrt{\varkappa}$ ist (vgl. den Satz 2 S. 114), lautet die Gleichung (4) angenähert

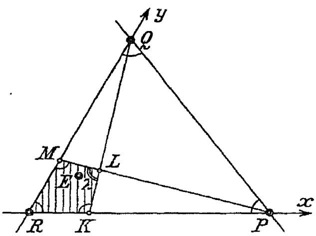


Fig. 161.

$$\bar{x}^2 = 1 + \frac{1}{2\varkappa}$$

oder
$$\bar{x} = 1 + \frac{1}{4\varkappa} \tag{4'}$$

und es ist
$$\lim \bar{x} = 1. \tag{5}$$

5. Beim Übergang zur euklidischen Geometrie ($\lim \varkappa = \infty$) *ergibt sich also als Einheitsfläche richtig das Quadrat über der Einheitsstrecke.*

Der Fig. 154 S. 184 wollen wir noch die Fig. 161 zur Seite stellen, deren schraffierter Teil ein dreifach rechtwinkliges Viereck $RKLM$ mit den zwei gleichen Seiten $RK = RM$ ist. (Dieses Viereck ist ersichtlich die Hälfte eines Saccherischen Vierecks[1]).) Die Eckpunkte K und M mögen die Abszisse bzw. Ordinate $x^* = y^*$ besitzen. *Für welchen Wert x^* stellt das Viereck die Einheitsfläche dar?*

1) Vgl. deswegen S. 147, sowie Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie; historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung, Leipzig 1908, S. 26.

Für den Winkel $K\widehat{L}M = \lambda$ ergibt sich (wieder nach der Formel (26b) S. 119)

$$\sin\lambda = \frac{\sqrt{\alpha\beta-\gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{\varkappa}x^{*2}}}{1+\frac{1}{\varkappa}x^{*2}} \tag{6}$$

oder

$$x^{*2} = -\varkappa\frac{\cos\lambda}{1+\cos\lambda}, \quad \text{wo } \pi > \lambda > \frac{\pi}{2} \tag{6a}$$

ist. Nun ist für die Einheitsfläche $RKLM$, da ja $\lambda - \frac{\pi}{2}$ ihr Exzeß ist, gemäß dem Satz 2

$$\sphericalangle\,\lambda = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\mu^2}. \tag{7}$$

Also ist für diesen Wert λ

$$x^{*2} = \varkappa\frac{\sin\frac{1}{\mu^2}}{1-\sin\frac{1}{\mu^2}} \tag{8}$$

oder angenähert für einen sehr großen Wert $\varkappa = \mu^2$

$$x^{*2} = 1 + \frac{1}{\varkappa}$$

oder

$$x^{*} = 1 + \frac{1}{2\varkappa} \tag{8a}$$

und

$$\lim_{\varkappa=\infty} x^{*} = 1.$$

6. Durch die Gleichung (8) *oder die angenäherte Gleichung* (8a) *ist also der Wert x^* bestimmt, der zu der Einheitsfläche $RKLM$ gehört.*

Wieder sind wir auch hier zu dem Satze 5 hingeführt.

§ 35. Der Dreiecksinhalt und das Inhaltsmaß in der hyperbolischen Geometrie.

Wir wenden uns nun zu der *hyperbolischen Geometrie*. Zunächst erkennen wir leicht, daß sich hier im Anschluß an die Definitionen 1, 2 und 3 (S. 181) die analogen Betrachtungen durchführen lassen, wie wir sie soeben für die elliptische Geometrie durchgeführt haben. Nur tritt jetzt an die Stelle der Definition 4 S. 181 die neue Definition:

1. Wir bezeichnen als Defekt eines Dreiecks die Differenz $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ und als Defekt eines Polygons mit n Ecken $(n-2)\,\pi-(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)$, wo wieder α, β, γ, ... die Winkel des Polygons bezeichnen, also den Überschuß δ von $(n-2)\,\pi$ über die Winkelsumme.

Dementsprechend ist in den hierher übertragenen Sätzen 5 bis 16 des § 33 S. 181 ff. auch nur das Wort „Exzeß" durch das Wort „Defekt" zu ersetzen. Nur der Satz 8 S. 183 bedarf eines geänderten Beweises. Sind nämlich zwei beliebige Dreiecke mit derselben Seite BC gegeben, die auf derselben Seite von BC liegen und denselben Defekt δ besitzen, so können wir zu jedem Dreieck ein analog gelegenes *gleichschenkliges* Dreieck über BC mit demselben

Defekt gewinnen. Diese beiden gleichschenkligen Dreiecke können aber ersichtlich nicht voneinander verschieden sein. Folglich müssen die dritten Ecken aller Dreiecke auf demselben Bogen der Äquidistante zur Mittellinie des gleichschenkligen Dreiecks liegen. Es ist auch leicht, die obere und untere Grenze für die Winkel an der Ecke B (oder C) bei der Wanderung der dritten Ecke A auf dem Äquidistantenbogen zu berechnen, mit Hilfe der Gleichung (34) S. 178 für $\alpha = 0$; doch wollen wir hierauf nicht weiter eingehen. Auch die Fig. 150—157 finden hier ihre sinngemäße Übertragung.

Nun aber wollen wir wieder uns dahin wenden, für den Inhalt eines Dreiecks ein bestimmtes *Inhaltsmaß* in anschaulicher Weise zu entwickeln.

Als Ausgangspunkt dieser Betrachtung wollen wir jetzt ein *Dreieck mit drei auf dem absoluten Kegelschnitt gelegenen Ecken* betrachten, oder ein Dreieck mit drei Winkeln 0 (vgl. Fig. 100 S. 111). Wir haben ein solches Dreieck ein *dreifach asymptotisches* Dreieck genannt.

Zunächst gilt der Satz:

2. *Alle dreifach asymptotischen Dreiecke sind einander kongruent.*

Denn wir können ja stets durch eine (gleichsinnige) Bewegung je zwei solche Dreiecke ineinander überführen, wie aus dem Satze 13 S. 63 und den sich dort anschließenden Betrachtungen folgt.

Nun gilt es aber zunächst zu untersuchen, ob wir berechtigt sind, einem solchen dreifach asymptotischen Dreieck eine *endliche* Zahl als Inhaltsmaß zuzuordnen, trotzdem das Dreieck sich dreimal ins Unendliche erstreckt. Zu dem Zweck wollen wir nachweisen, daß ein dreifach asymptotisches Dreieck zerlegungsgleich ist mit ganz im Endlichen gelegenen Polygonen.

Wir wollen ein solches Dreieck der Einfachheit halber jetzt so gelegen annehmen, daß die Ecke A im Punkte mit den Koordinaten $\left(+\sqrt{\varkappa}, 0\right)$, die Ecke B im Punkte $\left(-\sqrt{\varkappa}, 0\right)$, die Ecke C aber beliebig auf dem Teil des absoluten Kegelschnittes mit negativer x- und positiver y-Koordinate oder, wenn wir wollen, im Punkte $\left(0, +\sqrt{\varkappa}\right)$ gelegen sind. (Fig. 162, wir betonen noch einmal: Diese Figur ist, wie analog schon oft bei den anderen Figuren bemerkt wurde, eine Vergleichsfigur, ein im Endlichen gelegenes Abbild der wirklichen Verhältnisse. Das Dreieck PQR ist natürlich wie früher das Fundamentaldreieck des projektiven Koordinatensystems, wie auch in den folgenden Figuren.) Wir betrachten jetzt allein den Teil RDA des dreifach asymptotischen Dreiecks. Wir denken dann noch denjenigen Grenzkreis mit dem Mittelpunkt A hinzugefügt, welcher die y-Achse im Anfangspunkte R berührt. (Wegen der Konstruktion des Grenzkreises wollen wir zu den Ausführungen im Anschluß an den Satz 7 S. 144 zurückblicken.) Dieser Grenzkreis schneide die Gerade AD im Punkte F. Es sei weiter H die Mitte des Grenzkreisbogens $\widehat{RF}$. (Um den

Punkt H in unserer Figur zu konstruieren, sei die Gerade RF mit QA im Punkte W zum Schnitt gebracht und von W die zweite Tangente mit dem Berührungspunkte U an den absoluten Kegelschnitt gelegt. Die Gerade AU schneidet dann die y-Achse im Punkte G, die Gerade RF im Punkte V und den Grenzkreisbogen $\widehat{RF}$ im Punkte H. Die Tangente von H an den Grenzkreisbogen geht durch den Punkt W, gemäß dem Satze 7 S. 144. Durch die

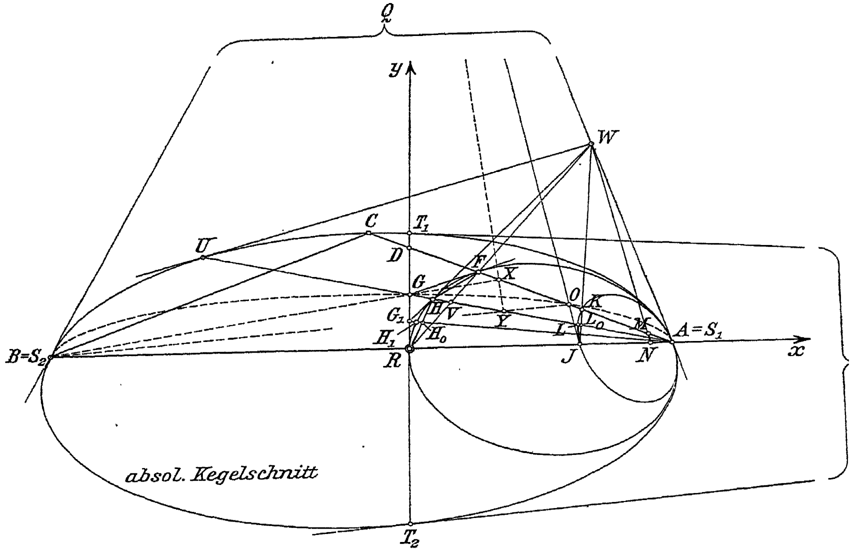


Fig. 162.

Umwendung um die Gerade AU geht also der Bogen $\overset{\frown}{RH}$ in den Bogen $\overset{\frown}{HF}$ über, da eben R, F, W, V vier harmonische Punkte sind.)

Nun legen wir durch den Punkt G die (in der Fig. 162 gestrichelt eingezeichnete) Äquidistante zur Geraden AR. Diese Äquidistante möge die Gerade AF im Punkte O schneiden. (Den Punkt O können wir leicht hiernach wie folgt konstruieren: Wir verbinden auch S_2 mit G bis zum Schnittpunkte X mit AD und bringen die Verbindungslinie QX mit AG im Punkte Y zum Schnitt. Die Gerade S_2Y schneidet dann AD im Punkte O. Die Konstruktion beruht ersichtlich auf der projektiven Erzeugung des durch S_1, S_2 und ihre Tangenten und den Punkt G bestimmten Kegelschnittes der Äquidistante, vgl. S. 170 im Bd. I.) Die Verbindungslinie QO schneide AR im Punkte J. Durch bestimmte Drehung um den Punkt Q geht dann der Punkt R in den Punkt J über, wobei auch QJ auf AR senkrecht steht, ferner der Grenzkreisbogen $\widehat{RH}$

in den Grenzkreisbogen $\widehat{JK}$, wo K auch auf AF liegt, und das Viereck $RHLJ$ in das Viereck $JKMN$, wobei L der Schnittpunkt von $\widehat{JK}$ und AG ist und die Ecke M ja auch auf AD liegt. Denken wir noch die Diagonalen JH und NK hinzugefügt, so sind also die Vierecke zerlegungsgleich nach der S. 181 gegebenen Definition 1.

Wir wollen auch hervorheben, daß durch die Umwendung um AH natürlich die Punkte R, J, N in die Punkte F, K, M übergehen. Wir nennen die Gerade AH demgemäß gleichsam die „Winkelhalbierende des Winkels $R\widehat{A}F$“.

Wir wollen jetzt zunächst noch die Abszisse $\bar{x}$ des Punktes J berechnen, wenn die Ordinate y_0 des Punktes D gegeben ist, obwohl es nicht nötig wäre, diese Abszisse zu kennen. Doch für den besseren Überblick über diese nicht einfachen Verhältnisse wird es recht nützlich sein. Wir können schon voraussagen, daß die Abszisse $\bar{x}$ unabhängig von y_0 ist, so daß wir zu demselben Punkt J gelangen, wo auch der Punkt D auf der y-Achse innerhalb des absoluten Kegelschnittes gelegen ist. Die Gerade AD hat nun die Gleichung

$$y_0 \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} x + y - y_0 = 0.$$

Da weiter die vier Punkte R, V, F, W harmonisch sind, so sind auch die vier Punkte R, G, D, Q harmonisch, d. h. der Punkt G hat die Ordinate

$$y_1 = \frac{y_0}{2}. \tag{1}$$

Die Äquidistante durch den Punkt G zur x-Achse hat die Gleichung

$$\frac{1}{\varkappa} y_0^2 x^2 + 4 y^2 = y_0^2.$$

Der Schnittpunkt O der Äquidistante mit der Geraden AD hat folglich die gesuchte Abszisse

$$\bar{x} = \frac{3}{5} \sqrt{\varkappa}. \tag{2}$$

Es ist also die Länge der Strecke RJ nach der Formel (17) S. 98 gleich

$$\sigma_0 = \mu \log 2. \tag{3}$$

Die Strecke RJ ist aber auch gleich der Strecke JN.

Das soeben geschilderte Verfahren werden wir nun sinngemäß wiederholen. Wir halbieren die Grenzkreisbogen $\widehat{RH}$ und $\widehat{HF}$ in den Punkten H_1 und F_1 (Fig. 163, vergrößert) und ziehen die Geraden AH_1 und AF_1 (die „Winkelhalbierenden der Winkel $R\widehat{A}H$ und $H\widehat{A}F$“), die wir mit dem Grenzkreisbogen $\widehat{JK}$ in den Punkten L_1 und K_1 zum Schnitt bringen. Dann sind auch L_1 und K_1 die Mittelpunkte von $\widehat{JL}$ und $\widehat{LK}$. Wir betrachten jetzt diejenige Drehung um den Punkt Q, welche den Punkt R in den Punkt N überführt. Diese Drehung

führt den Punkt J in den Punkt N_1 auf AR über, wobei die Strecke $NN_1 = JN = RJ$ ist, und den Punkt H_1 in den Punkt M. (Denn die Drehung ist ja die zweifache Wiederholung der früheren Drehung um Q, die den Punkt R in den Punkt J überführt. Es gelangt also H_1 zunächst nach L, dem Mittelpunkt des Grenzkreisbogens $\widehat{JK}$, und dann weiter nach M.) Ferner gelangt der Punkt L_1 nach einem Punkt M_1 auf der Geraden AF. Es ist also das Viereck NMM_1N_1 kongruent dem Viereck RH_1L_1J. Dieses aber ist kongruent dem Viereck HF_1K_1L. Jetzt seien weiter H_2, F_2, L_2, K_2 die Mittelpunkte der Grenzkreisbogen $\widehat{RH_1}$, $\widehat{FF_1}$, $\widehat{JL_1}$ und $\widehat{KK_1}$. Dann gilt durch nochmalige Fortsetzung des Verfahrens, daß das Viereck

$$N_1M_1M_2N_2 \cong RH_2L_2J$$
$$\cong F_1F_2K_2K_1$$

ist. Durch unendliche Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir also eine Einteilung des Dreiecks AJK in die sich aneinander anschließenden Vierecke $JKMN$, NMM_1N_1, ... Diese Vierecke erfüllen das Dreieck AJK, d. h. es läßt sich kein von A verschiedener Punkt des Dreiecks angeben, der nicht bei hinreichend fortgesetztem Verfahren von einem der Vierecke überdeckt würde. Es ist das Dreieck AJK also zerlegungsgleich dem Polygon $RHF_1F_2 \ldots FK \ldots K_2K_1LJ$. Dieses Polygon wollen wir aber noch umformen. Es ist ja das Teilpolygon $HF_1F_2 \ldots FH$ kongruent dem Teilpolygon $JLK_1K_2 \ldots KJ$. Wir wollen noch beachten, daß z. B. das Dreieck $HF_1F_0 \cong \triangle JLL_0 \cong \triangle RH_1H_0 \cong \triangle NMM_0$ ist und daß wir schließlich je zwei kongruente Vierecke ja noch durch entsprechende Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegen können.

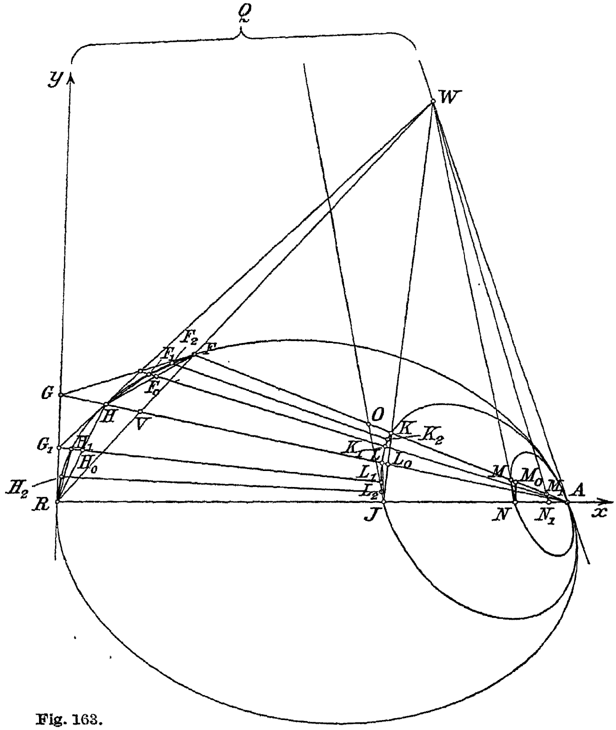


Fig. 163.

3. Das Dreieck AJK ist also zerlegungsgleich und damit auch inhaltsgleich dem Fünfeck $RHFKJ$.

Doch ist bei dieser Ableitung allerdings die frühere Definition 1 S. 181 des Begriffs „zerlegungsgleich" naturgemäß insofern hier erweitert, als auch die bestimmte Zerlegung des Dreiecks AJK und des Fünfecks $RHFKJ$ in *unendlich viele* kongruente Dreiecke zugelassen ist.

Wir erkennen auch leicht:

4. Das Dreieck AJK und das Fünfeck sind auch defektgleich.

Denn das Dreieck hat die Winkel 0, $A\widehat{J}K = \vartheta$, $J\widehat{K}A = \vartheta$, das Fünfeck $RHFKJ$ aber die Winkel ϑ, 2ϑ, ϑ, $\pi - \vartheta$, $\pi - \vartheta$. (Es ist auch einfach, wenn wir wollen, das Fünfeck noch in ein zerlegungs- und defektgleiches, gleichschenkliges *Dreieck* überzuführen, nämlich in das Dreieck HXY, wo die Eckpunkte X, Y die Schnittpunkte von JK mit den Geraden von H nach den Mittelpunkten der Strecken RJ und FK sind.)

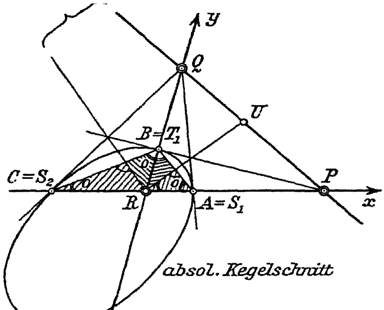


Fig. 164.

Ein analoges Resultat gilt natürlich auch für die entsprechenden Teile des Dreiecks ABC an den Ecken B und C der Fig. 162. Somit können wir endlich zu dem Schlußresultat gelangen:

5. Es lassen sich in der Tat ganz im Endlichen liegende Polygone angeben, die mit einem gegebenen dreifach asymptotischen Dreieck zerlegungsgleich sind.

Diese Polygone lassen sich übrigens auch in ein einziges, im Endlichen liegendes, zerlegungsgleiches Polygon mit demselben Defekt π, wie das Dreieck ABC, überführen. Man beachte, daß sich das Fünfeck $RHFKJ$ auch noch um JK umwenden läßt.

Wir werden dieses Schlußresultat wohl noch leichter übersehen, wenn wir jetzt das dreifach asymptotische Dreieck ABC so gelegen annehmen, daß die Ecken in den Punkten $(+\sqrt{\varkappa}, 0)$, $(0, +\sqrt{\varkappa})$ und $(-\sqrt{\varkappa}, 0)$ des absoluten Kegelschnittes gelegen sind (Fig. 164). Dann können wir das Dreieck leicht in die vier in der Figur schraffierten kongruenten Dreiecke mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, 0 zerlegen. Jedes dieser Dreiecke ist dann nur einfach asymptotisch und läßt sich daher dem Vorstehenden gemäß in ein im Endlichen liegendes zerlegungsgleiches Polygon überführen. Sofort können wir jetzt sagen:

6. Der Satz 5 gibt uns die Berechtigung, nunmehr dem dreifach asymptotischen Dreieck das e n d l i c h e *Inhaltsmaß $\pi\mu^2$ als Grundlage für unsere weitere Inhaltsberechnung zuzuschreiben.*

Wir wollen nun weiter in ähnlicher Weise, wie wir in der elliptischen Geometrie vorgegangen sind, auch in der *hyperbolischen Geometrie in anschaulicher Weise für das beliebige Dreieck ABC das Inhaltsmaß entwickeln.* Hierbei tritt eben an die Stelle der ganzen Ebene in der elliptischen Geometrie jetzt gleichsam das dreifach asymptotische Dreieck. (Die elliptische Ebene bzw. das dreifach asymptotische Dreieck sind also ein gegebenes *absolutes Flächenmaß.* In der euklidischen Geometrie ist ein solches nicht vorhanden.)

Das dreifach asymptotische Dreieck möge wieder so gewählt sein, daß die Ecken A, B, C in den Punkten $\left(+\sqrt{\varkappa}, 0\right)$, $\left(0, +\sqrt{\varkappa}\right)$ und $\left(-\sqrt{\varkappa}, 0\right)$ des absoluten Kegelschnittes gelegen sind (Fig. 164). Wir erkennen dann sofort, da die rechtwinkligen Dreiecke RAB und RCB kongruent sind:

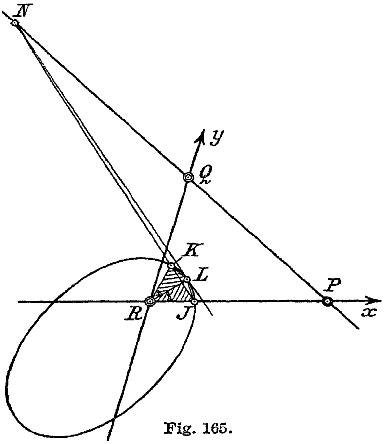


Fig. 165.

7. *Das zweifach asymptotische rechtwinklige Dreieck hat das Inhaltsmaß* $\frac{\pi}{2}\mu^2$.[1])

Ferner wollen wir den Satz beweisen:

8. *Wenn das zweifach asymptotische Dreieck mit dem Winkel $\omega < \pi$ das Inhaltsmaß $(\pi - \omega)\mu^2$ hat, so hat das zweifach asymptotische Dreieck mit dem Winkel $\frac{\omega}{2}$ das Inhaltsmaß* $\left(\pi - \frac{\omega}{2}\right)\mu^2$.

Einstweilen ist allerdings die Voraussetzung dieses Satzes erst für den Winkel $\omega = \frac{\pi}{2}$ erwiesen. Es sei nun das zweifach asymptotische Dreieck mit dem Winkel ω der Einfachheit halber so gelegen, daß der Scheitel dieses Winkels der Koordinatenanfangspunkt R, und die eine Ecke J der Punkt $\left(+\sqrt{\varkappa}, 0\right)$ ist, während die dritte Ecke K etwa auf dem Teil des absoluten Kegelschnittes mit positiven y-Koordinaten sich befindet (Fig.165). (Es braucht ja wohl kaum hervorgehoben zu werden, daß ja alle zweifach asymptotischen Dreiecke mit demselben Winkel ω kongruent sind.) Es sei dann zu dem Schnittpunkt N der Geraden PQ und der Geraden JK die Polare RL bezüglich des absoluten Kegelschnittes gezeichnet. Dann geht durch die Umwendung um RL das Dreieck RLJ in das Dreieck RLK über. Es ist also insbesondere auch $\sphericalangle JRL = \sphericalangle KRL = \frac{\omega}{2}$. Nun ist ersichtlich

$$2\,\triangle RLJ = \triangle RJK + \triangle JKL$$

1) Vgl. hier auch: C. F. Gauß, Werke, Bd. VIII, S. 221ff. Siehe deswegen auch H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, 3. Aufl., Leipzig 1923, S. 44.

oder $$2\,\triangle\, RLJ = (\pi - \omega)\,\mu^2 + \pi\,\mu^2,$$

d. h. $$\triangle\, RLJ = \left(\pi - \frac{\omega}{2}\right)\mu^2.$$

Als weitere Beispiele für den Satz 8 wollen wir die Aufeinanderfolge der zweifach asymptotischen Dreiecke ARB, ARB_1, ARB_2 ... mit den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, ... in der Fig. 166 betrachten.

Eine Verallgemeinerung des Satzes 8 ist nun der Satz:

9. Wenn zwei zweifach asymptotische Dreiecke mit den Winkeln ω_1, ω_2 die Inhaltsmaße $(\pi - \omega_1)\mu^2$ und *$(\pi - \omega_2)\mu^2$ besitzen, so besitzt das zweifach asymptotische Dreieck mit dem Winkel $\omega = \omega_1 + \omega_2$ das Inhaltsmaß $(\pi - \omega)\mu^2$.*

Es ist ja in der Fig. 167

$$\begin{aligned}\triangle\, RLN &= \triangle\, RLM + \triangle\, RMN - \triangle\, LMN \\ &= (\pi - \omega_1)\mu^2 + (\pi - \omega_2)\mu^2 - \pi\mu^2 \\ &= (\pi - \omega)\mu^2.\end{aligned}$$

Aus den vorstehenden Sätzen 8 und 9 folgt dann leicht weiter:

10. Alle zweifach asymptotischen Dreiecke mit dem Winkel $m\frac{\pi}{2^n}$, wo n eine beliebige positive ganze Zahl, m eine positive, ungerade, ganze Zahl und $\leqq 2^n$ sei, haben das Inhaltsmaß $\left(\pi - m\frac{\pi}{2^n}\right)\mu^2$.

Es ergibt sich insbesondere hieraus der eigenartige Satz:

11. Die zweifach asymptotischen Dreiecke mit dem Winkel $\frac{\pi}{2^n}$ haben ein um so größeres Inhaltsmaß, je größer n ist, und dieses nähert sich mit zunehmender Zahl n beliebig der Zahl $\pi\,\mu^2$ als oberer Grenze.

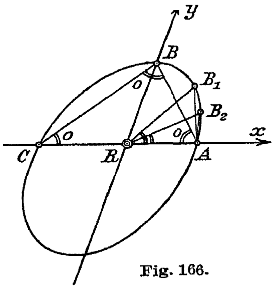


Fig. 166.

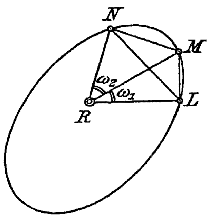


Fig. 167.

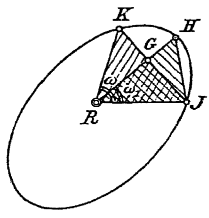


Fig. 168.

Eine Verallgemeinerung des Satzes 10 ist nun der folgende Satz:

12. Von zwei zweifach asymptotischen Dreiecken mit dem Winkel ω bzw. ω_1, wo $\omega > \omega_1$ sei, ist das Dreieck mit dem größeren Winkel ω das kleinere (Fig. 168).

Wir können ja das Teildreieck GKR so auf das Teildreieck GHJ gelegt denken, daß GK mit GH zur Deckung kommt und GR in die Richtung von GJ fällt. Da nun GJ unendlich groß, aber GR endlich ist, so erfüllt bei diesem Aufeinanderlegen das Dreieck GKR nur einen Teil des Dreiecks GHJ, d. h. es ist das erste Dreieck inhaltskleiner als das zweite und damit auch das *Dreieck RJK inhaltskleiner als das Dreieck RJH* (vgl. den Satz 16 S. 186).

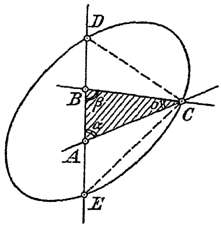


Fig. 169.

Aus den Sätzen 10 und 12 folgt somit auch leicht:

13. Das zweifach asymptotische Dreieck mit dem Winkel α $(0 < \alpha \leqq \pi)$ hat das Inhaltsmaß $(\pi - \alpha)\,\mu^2$.

Es sei nun weiter ein beliebiges, *einfach* asymptotisches Dreieck ABC mit den Winkeln α, β gegeben (Fig. 169). Dann hat das Dreieck ACD das Inhaltsmaß $(\pi - \alpha)\,\mu^2$ und das Dreieck BCE das Inhaltsmaß $(\pi - \beta)\,\mu^2$.

Wir wollen fernerhin einfach symbolisch schreiben

$$\triangle\, ACD = (\pi - \alpha)\,\mu^2,$$

$$\triangle\, BCE = (\pi - \beta)\,\mu^2.$$

Es ist aber auch

$$\triangle\, ABC = \triangle\, ACD + \triangle\, BCE - \triangle\, CDE,$$

wo $\triangle\, CDE$ das Inhaltsmaß $\pi\mu^2$ besitzt. Also hat das Dreieck ABC das Inhaltsmaß $(\pi - (\alpha + \beta))\,\mu^2$ oder es ist

$$\triangle\, ABC = (\pi - (\alpha + \beta))\,\mu^2, \qquad \text{d. h.:}$$

14. Das einfach asymptotische Dreieck mit den Winkeln α, β hat das Inhaltsmaß $(\pi - (\alpha + \beta))\,\mu^2$.

Wir wenden uns endlich zu dem beliebigen (im Endlichen gelegenen) Dreieck ABC mit den Winkeln α, β, γ hin (Fig. 170). Es ist dann

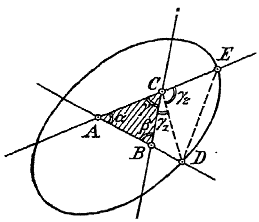


Fig. 170.

$$\triangle\, ADE = (\pi - \alpha)\,\mu^2,$$

$$\triangle\, BCD = [\pi - ((\pi - \beta) + \gamma_1)]\,\mu^2,$$

$$\triangle\, CDE = (\pi - \gamma_2)\,\mu^2.$$

Folglich ist, da $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi - \gamma$ ist,

$$\triangle\, ABC = \triangle\, ADE - \triangle\, BCD - \triangle\, CDE$$

$$= [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)]\,\mu^2.$$

Dann haben wir also erhalten:

15. Das Inhaltsmaß des Dreiecks ABC ist gleich dem Produkt aus dem Defekt

des Dreiecks und dem Quadrate der Weltmaßstrecke (vgl. den Satz 1 S. 188 der elliptischen Geometrie).[1])

Es sei nur noch auf die Übertragung der Sätze 4 und 5 S. 189 der elliptischen Geometrie in die hyperbolische Geometrie kurz hingewiesen. In den Formeln (2a) und (4) S. 189 ist einfach $-\varkappa$ und μ^2 durch $+\varkappa$ und $-\mu^2$ zu ersetzen, und es gilt jetzt

$$\frac{\pi}{4} > \delta > 0\,.$$

Achter Abschnitt.

Inhalt und Umfang eines Kreises.

§ 36. Das Flächenelement und der Inhalt und Umfang eines Kreises.

In der euklidischen ebenen Geometrie ist bei Einführung rechtwinkliger (x, y)-Koordinaten der Inhalt eines Flächenelementes gleich $dx\,dy$ und der

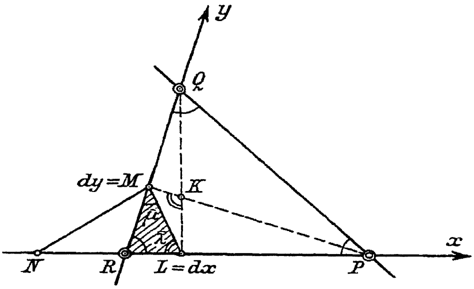


Fig. 171 a.

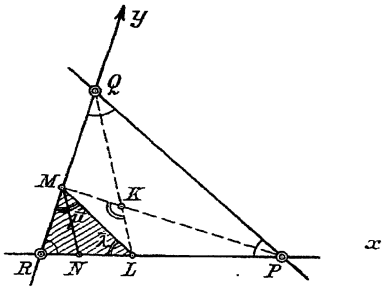


Fig. 171 b.

Inhalt irgendeines Flächenstückes wird daher durch das Integral $\iint dx\,dy$ gegeben. Wir wollen sehen, auch in der nichteuklidischen Geometrie analoge Formeln zu gewinnen. Es sei ein unendlich kleines Dreieck LMN (d. h. ein Dreieck mit unendlich kleinen Seiten) gegeben. Wir wollen dasselbe so in dem projektiven Koordinatensystem gelegen denken, daß die Seite NL auf der x-Achse, die Höhe des Dreiecks vom Eckpunkt M aus auf der y-Achse, also der Fußpunkt R im Koordinatenanfangspunkt sich befindet (Fig. 171 a, b). Wir betrachten zunächst das rechtwinklige Dreieck RLM mit den Winkeln

1) Vgl. Gauß' Brief an Gerling vom 16. März 1819: „Der Defekt der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180° ist z. B. nicht bloß desto größer, je größer der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so daß der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthaltenen Fläche gleich ist", Gauß, Werke, Bd. VIII, S. 182, ferner P. Stäckel, C. F. Gauß als Geometer, Leipzig 1918.

$\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ und den Ecken L, M. Diese Winkel $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ wollen wir berechnen, wenn der Punkt L die Abszisse dx, der Punkt M die Ordinate dy besitzt. Und zwar wollen wir die *elliptische Geometrie* annehmen; für die *hyperbolische Geometrie* würden im folgenden nur kleine Änderungen vorzunehmen, insbesondere die Größen $-\varkappa$ und μ^2 mit $+\varkappa$ und $-\mu^2$ zu vertauschen sein.

Die Linienkoordinaten der x-Achse sind ja $(u_1, v_1, t_1) = (0, 1, 0)$. Die Gerade LM hat die Gleichung

$$x\,dy + y\,dx - dx\,dy = 0;$$

die Linienkoordinaten von LM sind also $(u_2, v_2, t_2) = (dy, dx, -dx\,dy)$. Also ist nach der Gleichung (19') S. 119 der Winkel

$$\sphericalangle\,\bar{\lambda} = i \log \frac{\gamma - \sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}\,i}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= i \log \frac{dx - dy\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2}\,i}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2\,dy^2}}$$

und
$$\sphericalangle\,\bar{\mu} = i \log \frac{dy - dx\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa}\,dy^2}\,i}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2\,dy^2}}.$$

Also ist

$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} = i \log \frac{\left(dx - dy\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2}\,i\right)\left(dy - dx\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa}\,dy^2}\,i\right)}{dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2\,dy^2}$$

oder, wenn wir die im Logarithmandus vorkommenden Wurzeln nach Potenzen von dx^2 bzw. dy^2 entwickeln,

$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} = i \log \frac{-\left(dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2\,dy^2\right) i - \frac{1}{2\varkappa}\,dx\,dy\,(dx^2 + dy^2)}{dx^2 + dy^2 + \frac{1}{\varkappa}\,dx^2\,dy^2}$$

oder

$$\bar{\lambda} + \bar{\mu} = i \log\left(-i - \frac{1}{2\varkappa}\,dx\,dy\right) = i\left[\log(-i) + \log\left(1 - \frac{1}{2\varkappa}\,dx\,dy\,i\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2\varkappa}\,dx\,dy.$$

Es ergibt sich somit für den Inhalt des Dreiecks RLM gemäß dem Satze 1 S. 188

$$\triangle\,RLM = \left(\bar{\lambda} + \bar{\mu} - \frac{\pi}{2}\right)\mu^2 = \frac{\mu^2}{2\varkappa}\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Nun ist weiter nach der Gleichung (15) S. 116 die Seite

$$RL = d\sigma = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{\sqrt{\varkappa} - dx\,i}{\sqrt{\varkappa} + dx\,i} = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}}\,dx$$

und die Seite
$$RM = d\sigma_1 = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}}\,dy$$

(vgl. auch die Formel (3) S. 157). Also ergibt die Gleichung (1)

$$\triangle RLM = \frac{RL \cdot RM}{2}. \tag{2}$$

Und für den Inhalt des Dreiecks LMN der Fig. 171a bzw. 171b ergibt sich weiter

$$\triangle LMN = (RL \pm RN)\,\frac{RM}{2} = \frac{NL \cdot RM}{2}. \tag{3}$$

Somit haben wir das Resultat gewonnen:

1. Für jedes unendlich kleine rechtwinklige Dreieck der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie ist der Inhalt gleich dem halben Produkt der Katheten und für jedes allgemeine unendlich kleine Dreieck ist der Inhalt gleich dem halben Produkt aus einer Seite und der zugehörigen Höhe.

Der Übergang zur *euklidischen* Geometrie ergibt sich hiernach von selbst.

Wir können aber auch weiter sagen: Für unendlich kleine Dreiecke gilt ja die euklidische Trigonometrie. Es ist also

$$RM = LM \sin\bar{\lambda}$$

(vgl. die Formel (1) S. 171 für $r = \mu$ und (26) S. 178). Folglich ergibt die Gleichung (3) weiter

$$\triangle LMN = \frac{NL \cdot LM}{2}\sin\bar{\lambda}, \tag{4}$$

d. h.:

2. Für jedes unendlich kleine Dreieck ist der Inhalt gleich dem halben Produkt aus zwei Seiten und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

Es sei noch bemerkt, daß der Inhalt des Vierecks der Fig. 171a, b

$$RLKM = 2\,\triangle RLM = \frac{\mu^2}{\varkappa}\,dx\,dy$$
$$= RL \cdot RM \quad \text{ist.}$$

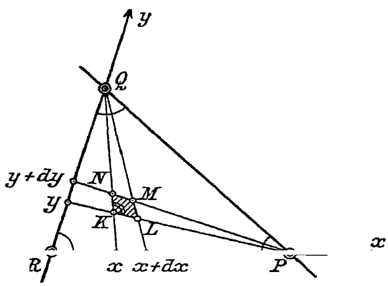


Fig. 172.

Nunmehr wenden wir uns zur Berechnung eines beliebigen Flächenelementes dF hin. Das Flächenelement dF soll das unendlich kleine Viereck $KLMN$ sein, dessen Ecken die Koordinaten (x, y), $(x + dx, y)$, $(x + dx, y + dy)$ und $(x, y + dy)$ besitzen (Fig. 172).

Nach dem Satze 2 ist der Inhalt des Vierecks (in der elliptischen Geometrie)

$$dF = KL \cdot KN \sin \bar{\gamma},$$

wo $\sphericalangle \bar{\gamma} = \sphericalangle L\widehat{K}N$ ist.

Nun ist nach der Formel (2′) S. 115

$$KL = i\,\mu \log \frac{c - i\sqrt{ab - c^2}}{\sqrt{ab}},$$

wo hier

$$a = x^2 + y^2 + \varkappa,$$
$$b = (x + dx)^2 + y^2 + \varkappa,$$
$$c = x\,(x + dx) + y^2 + \varkappa$$

ist. Nach einfacher Rechnung ergibt sich

$$KL = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa} y^2}}{1 + \frac{1}{\varkappa}(x^2 + y^2)}\,dx$$

(vgl. auch die Formel (3) S. 157). Ebenso ist

$$KN = \frac{\mu}{\sqrt{\varkappa}} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa} x^2}}{1 + \frac{1}{\varkappa}(x^2 + y^2)}\,dy.$$

Ferner ist nach der Gleichung (26b) S. 119

$$\sin \bar{\gamma} = \frac{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

und

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\varkappa} x^2,$$
$$\beta = 1 + \frac{1}{\varkappa} y^2,$$
$$\gamma = \frac{1}{\varkappa} x y,$$

da die Geraden KN und KL die Linienkoordinaten $(1, 0, -x)$ und $(0, 1, -y)$ besitzen. Also ist

$$\sin \bar{\gamma} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa}(x^2 + y^2)}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa} x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{\varkappa} y^2}}.$$

Folglich ergibt sich

$$dF = \frac{\mu^2}{\varkappa} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\varkappa}(x^2 + y^2)\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy. \qquad (5')$$

Für die *hyperbolische* Geometrie tritt nur $+\varkappa$ und $-\mu^2$ an die Stelle von $-\varkappa$ und μ^2 in dieser Formel. Für $\lim \varkappa = \infty$ ergibt sich die Formel der euklidischen Geometrie.

3. Das in der Fig. 172 dargestellte Flächenelement der elliptischen Geometrie ist also durch die einfache Gleichung (5′) bestimmt[1]*), ein beliebiges Flächenstück der elliptischen bzw. hyperbolischen Ebene demnach durch die Gleichung*

$$F = \frac{\mu^2}{\varkappa}\iint \frac{1}{\left(1 \text{ [illegible] } (x^2+y^2)\right)^{\frac{3}{2}}}\, d\,x\, d\,y. - \qquad (6)$$

Wir wollen nun dazu übergehen, den *Inhalt eines Kreises* mit endlich fernem Mittelpunkt zu berechnen. Wir können ja den Mittelpunkt sogleich im Koordinatenanfangspunkt gelegen annehmen. Ebenso wie in der euklidischen Geometrie wird es bequem sein, *metrische Polarkoordinaten* ϱ, φ einzuführen, wo diese in der nichteuklidischen Geometrie ebenso wie in der euklidischen Geometrie definiert sind.

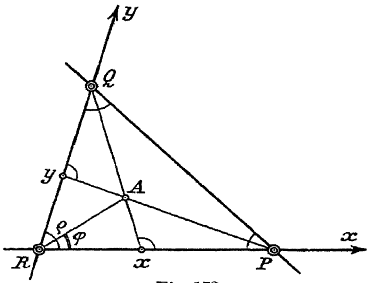


Fig. 173.

Zunächst wollen wir die *Beziehung zwischen den projektiven* (x, y)*-Koordinaten und den metrischen* (ϱ, φ)*-Koordinaten* entwickeln.

Für den Punkt A in der Fig. 173 sind beide Koordinatenpaare angegeben. Wir wollen für das Folgende zunächst die *elliptische* Geometrie annehmen. Die x-Achse hat die Linienkoordinaten $(u_1, v_1, t_1) = (0, 1, 0)$, die Gerade RA dagegen die Linienkoordinaten $(u_2, v_2, t_2) = (-y, x, 0)$. Es ist also nach den Formeln (26a, b) S. 119

$$\cos\varphi = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\alpha\beta - \gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

wo hier

$$\alpha = 1,$$
$$\beta = x^2 + y^2,$$
$$\gamma = x$$

ist, d. h.

$$\cos\varphi = \frac{\text{[illegible]}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (7\text{a, b})$$

1) Die Formel (5′) ist von F. Klein in interessanter anderer Weise abgeleitet in seiner Nichteuklidischen Geometrie I, Vorlesung W. S. 89/90, ausgearbeitet von Fr. Schilling, 2. Abdruck, Göttingen 1893, S. 120.

also
$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} - \tag{8}$$

(vgl. die analogen Formeln der euklidischen Geometrie).

Ferner ist nach der Formel (2′) S. 115.

$$\varrho = RA = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{c - i\sqrt{ab - c^2}}{c + i\sqrt{ab - c^2}},$$

wo hier
$$a = \varkappa,$$
$$b = x^2 + y^2 + \varkappa,$$
$$c = \varkappa$$

ist, oder
$$\varrho = i\,\frac{\mu}{2}\log\frac{\sqrt{\varkappa} - i\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\varkappa} + i\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder
$$e^{\frac{2\varrho}{\mu}i} = \frac{\cos\frac{\varrho}{\mu} + i\sin\frac{\varrho}{\mu}}{\cos\frac{\varrho}{\mu} - i\sin\frac{\varrho}{\mu}} = \frac{\sqrt{\varkappa} + i\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{\varkappa} - i\sqrt{x^2+y^2}}$$

oder
$$\operatorname{tg}\frac{\varrho}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sqrt{x^2+y^2}, \tag{9}$$

also
$$\varrho = \mu\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{9′}$$

Umgekehrt ergibt sich aus den Gleichungen (7a, b) und (9)

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varrho}{\mu}\cos\varphi,\\ y &= \sqrt{\varkappa}\operatorname{tg}\frac{\varrho}{\mu}\sin\varphi, \end{aligned}\right. \tag{10a, b}$$

oder, für homogene (x, y, s)-Koordinaten,

$$\left.\begin{aligned} \bar\varrho\, x &= \sin\frac{\varrho}{\mu}\cos\varphi,\\ \bar\varrho\, y &= \sin\frac{\varrho}{\mu}\sin\varphi,\\ \bar\varrho\, s &= \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\cos\frac{\varrho}{\mu}, \end{aligned}\right\} \tag{10′a, b, c}$$

wo $\bar\varrho$, wie bekannt, den Proportionalitätsfaktor bezeichnet, d. h.:

4. *Für die elliptische Geometrie stellen die Gleichungen* (8) *und* (9′) *einerseits, und* (10a, b) *andererseits die Transformationsformeln für den Übergang von projektiven Koordinaten zu Polarkoordinaten und umgekehrt dar.*

Analog ergibt sich:

5. *Für die hyperbolische Geometrie gelten auch die Gleichungen* (7a, b) *und* (8) *und die Gleichung*

$$\operatorname{tgh}\frac{\varrho}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\sqrt{x^2+y^2}, \tag{9*}$$

sowie die Gleichungen

$$x = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{tgh}\frac{\varrho}{\mu}\cos\varphi,$$
$$y = \sqrt{\varkappa}\,\operatorname{tgh}\frac{\varrho}{\mu}\sin\varphi. \tag{10*a, b}$$

Nun ist es leicht, das Flächenelement $KLMN$ zu berechnen, dessen Ecken die Polarkoordinaten (ϱ, φ), $(\varrho + d\varrho, \varphi)$, $(\varrho + d\varrho, \varphi + d\varphi)$ und $(\varrho, \varphi + d\varphi)$ besitzen (Fig. 174).

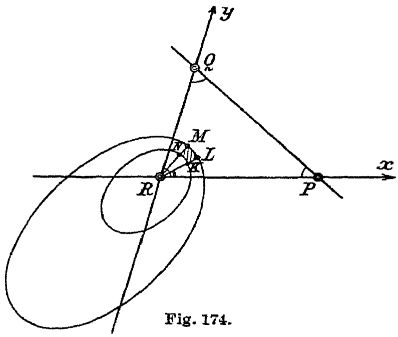


Fig. 174.

Es gilt zunächst für das Bogenelement KN nach den Gleichungen (10a, b)

$$dx = -\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{tg}\frac{\varrho}{\mu}\sin\varphi\,d\varphi,$$
$$dy = \quad\sqrt{\varkappa}\,\operatorname{tg}\frac{\varrho}{\mu}\cos\varphi\,d\varphi.$$

Demnach ist nach der Formel (3) S. 157

$$d\sigma = KN = \mu\sin\frac{\varrho}{\mu}\,d\varphi. \tag{11}$$

Also ist das Flächenelement der Fig. 174

$$dF = \mu\sin\frac{\varrho}{\mu}\,d\varrho\,d\varphi. \tag{12}$$

Jetzt ergibt sich also:

6. Der Inhalt des Kreises in der elliptischen Geometrie ist

$$F = \mu\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\varrho}\sin\frac{\varrho}{\mu}\,d\varrho\,d\varphi = 2\pi\mu^2\left(1 - \cos\frac{\varrho}{\mu}\right)$$

oder

$$F = 4\pi\mu^2\sin^2\frac{\varrho}{2\mu}. \tag{13}$$

Analog erhalten wir:

7. Der Inhalt des Kreises in der hyperbolischen Geometrie ist

$$F = 4\pi\mu^2\sinh^2\frac{\varrho}{2\mu} = \pi\mu^2\left(e^{\frac{\varrho}{2\mu}} - e^{-\frac{\varrho}{2\mu}}\right)^2. \tag{13a}$$

Für $\lim \mu = \infty$, d. h. für die *euklidische Geometrie*, ergeben die Formeln (13) und (13a) richtig $F = \pi\varrho^2$.

Endlich ergibt die Formel (11)

8. Der Umfang des Kreises in der elliptischen Geometrie ist

$$U = \int_0^{2\pi} d\sigma = 2\pi\mu\sin$$

und analog der Umfang des Kreises in der hyperbolischen Geometrie

$$U = 2\pi\mu \sinh\frac{\varrho}{\mu} = \pi\mu\left(e^{\frac{\varrho}{\mu}} - e^{-\frac{\varrho}{\mu}}\right).^{1)}$$

Für $\lim \mu = \infty$ folgt die Formel der *euklidischen* Geometrie

$$U = 2\pi\varrho.$$

Neunter Abschnitt.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome.

§ 37. Die Widerspruchslosigkeit des nichteuklidischen Parallelenaxioms mit den übrigen Axiomen.

Wir können uns nun dem Beweise der wichtigen Tatsache zuwenden, daß alle von uns eingeführten Axiome ein in sich widerspruchsfreies System bilden, *daß also insbesondere das eine oder andere nichteuklidische Parallelenaxiom nicht mit den übrigen projektiven und metrischen Axiomen im Widerspruch stehen kann.*

Um diesen Nachweis zu führen, wollen wir jetzt wieder annehmen, daß wir zunächst nur die projektive Geometrie besitzen, wie sie im ersten Bande aufgebaut wurde. Diese projektive Geometrie wollen wir aber erweitern, indem wir in ihr eine *projektive Maßbestimmung* entwickeln. Diese Maßbestimmung ist also keineswegs eine metrische Geometrie. Vielmehr können wir gleich voraussagen, daß eben an Stelle der von uns eingeführten metrischen Axiome, nämlich der Bewegungsaxiome und des Parallelenaxioms, nunmehr analoge projektive Sätze treten, die bewiesen werden. Der projektiven Maßbestimmung soll jetzt ein *beliebiger* einteiliger bzw. nullteiliger Kegelschnitt zugrunde liegen mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - \varkappa s^2 = 0 \text{ bzw. } x^2 + y^2 + \varkappa s^2 = 0,$$

wo $\varkappa$ eine positive (nicht mehr notwendig sehr große) Konstante, etwa $\varkappa = 1$, sei. Wir *definieren* dann den Abstand (Pseudoabstand) zweier Punkte A, B oder den Winkel (Pseudowinkel) zweier Geraden a, b durch dieselben Formeln, die wir in den Paragraphen 20 bis 23 entwickelt haben. Somit ist dann die Grundlage der *hyperbolischen* bzw. *elliptischen projektiven Maßbestimmung* gewonnen. Nach unseren bisherigen Entwicklungen ist ferner leicht zu erkennen, daß eine solche projektive Maßbestimmung auch stets eine Gruppe von ∞^3 projektiven Transformationen besitzt, die den Kegelschnitt in sich

1) Diese Formel für die hyperbolische Geometrie ist bereits von Gauß in seinem Brief an Schumacher vom 12. Juli 1831 angegeben; vgl. Gauß, Werke, Bd. VIII, S. 218.

überführen und daher als Bewegungen (Pseudobewegungen) in der projektiven Maßbestimmung bezeichnet werden können. Jetzt gelten also, wie wir schon andeuteten, die Tatsachen der Bewegungsaxiome der nichteuklidischen Geometrie (vgl. S. 3 und 4) als analoge Lehrsätze, die bewiesen sind. Ebenso gilt ferner jetzt auch die Tatsache des einen oder anderen nichteuklidischen Parallelenaxioms (vgl. S. 24) als ein analoger, aber bewiesener Lehrsatz der projektiven Maßbestimmung.

Aus dieser Überlegung folgt aber dann sogleich weiter: Wenn jetzt in der einen oder anderen nichteuklidischen Geometrie, wie wir sie entwickelt haben, bei irgendwelchen weiteren Untersuchungen sich ein Widerspruch herausstellen würde, der dann doch auf einen Widerspruch der Axiome hinauskäme, so müßte der analoge Widerspruch sich auch in der projektiven Maßbestimmung und damit in der projektiven Geometrie ergeben. Denn die projektive Maßbestimmung ist eben nur ein Teil der projektiven Geometrie. Nun aber hat Herr Hilbert gezeigt[1]), daß es in der euklidischen Geometrie (und damit natürlich auch in der projektiven Geometrie, die doch wieder nur ein Teil auch der euklidischen Geometrie ist) keinen Widerspruch zwischen den eingeführten Axiomen geben kann. Auf Grund dieses Hilbertschen Beweises folgt dann aber unmittelbar: Auch in der durch die projektive Maßbestimmung vervollständigten projektiven Geometrie kann es keinen Widerspruch geben.

1. Folglich ist auch das System der Axiome der hyperbolischen bzw. elliptischen Geometrie in sich widerspruchsfrei.

In diesem wichtigen Resultat haben wir eines der hervorragendsten Ergebnisse der von F. Klein geschaffenen Entwicklung der nichteuklidischen Geometrie auf projektiver Grundlage zu erblicken.

Zehnter Abschnitt.

Schlußbemerkungen.

§ 38. Was sagen die Relativitätstheorie, die Geodäsie und die Astronomie zu den nichteuklidischen Geometrien?

Am Schlusse unseres Aufbaues der beiden neben die euklidische Geometrie sich stellenden nichteuklidischen Geometrien werden wir uns natürlich die Frage vorlegen, *welche der drei Geometrien des projektiven Raumes und der bielliptischen (sphärischen) Geometrie des biprojektiven Raumes* (vgl. den § 34 in Bd. I) *(also von anderen noch möglichen Geometrien ganz abgesehen) uns am sympathischsten ist, von welcher wir daher am ehesten glauben möchten, daß sie in unserem Raume wirk-*

1) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Leipzig 1930, S. 34ff.

lich vorhanden ist. Da wird es aber doch wohl wünschenswert sein, vorerst noch anzuhören, was diejenigen über die reine Geometrie hinausgehenden Forschungsgebiete, welche über die hier in Frage kommenden Sätze der Geometrie sich äußern können oder solche Sätze zu ihrer Entwicklung benutzen, nämlich die *Relativitätstheorie*, die *Geodäsie* und die *Astronomie* zu den Geometrien zu sagen haben.

In betreff der Relativitätstheorie können wir naturgemäß nicht in die Wiedergabe der in Betracht kommenden Entwicklungen eingehen. Wir müssen uns schon begnügen, unter Hinweis auf die Literatur[1]) das Resultat anzuführen. Die Einsteinsche Relativitätstheorie besagt: Wenn wir die ungleichartige Verteilung der Gestirne im Weltenraum durch eine überall gleichartige Verteilung der Massen ersetzen, so muß die Krümmung des Raumes (vgl. S. 118) überall einen konstanten *positiven* Wert haben, also die *elliptische* (oder die *bielliptische*) Geometrie vorliegen. Nach verschiedenen Schätzungen von Herrn de Sitter beträgt der „Weltradius oder die Weltmaßstrecke m" (dort mit R bezeichnet) mit der Maßzahl μ etwa im Mittel 10^{11} Erdbahnradien (etwa $1{,}5 \cdot 10^{19}$ km) oder etwa $1{,}6 \cdot 10^6$ Lichtjahre, wo ein Lichtjahr die Strecke bedeutet, die der Lichtstrahl in einem Jahr durchläuft (also $9460 \cdot 10^9$ km). Demnach beträgt bei Zugrundelegung eines Lichtjahres als Einheitsstrecke die Krümmung des Raumes etwa $\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{2{,}6 \cdot 10^{12}}$ und die Länge der Geraden (vgl. den Satz 3 S. 115) $l = \mu\pi = 1{,}6 \cdot 10^6 \cdot \pi$ Lichtjahre.

1. Jedenfalls ist auf das Lichtjahr bezogen die Weltkrümmung hiernach eine phantastisch kleine, die Länge der Geraden eine phantastisch große Zahl.

Wir wollen nun die *Geodäsie* hören. Schon Gauß hat ein geodätisches Dreieck möglichst genau ausgemessen, dessen Ecken der Brocken im Harz, der Inselsberg in Thüringen und der Hohehagen bei Göttingen waren.[2]) (Hierbei, wie auch später in der Astronomie, ist natürlich physikalisch angenommen, daß das Licht sich geradlinig fortpflanzt.) Doch es zeigte sich, daß die Winkelsumme dieses Dreiecks nur um einen Betrag von 180° verschieden war, der innerhalb

1) Vgl. W. de Sitter, On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences, first, second and third paper, Monthly notices of the royal astronomical society, vol. 76 p. 699, vol. 77, p. 155 und vol. 78, p. 3, 1916—1918, insbesondere vol. 58, p. 24ff., W. de Sitter, On the curvature of space, Proceedings of the section of sciences, Vol. XX, Amsterdam 1918, S. 229 (hier $R = \frac{2}{3} \cdot 10^{10}$ Erdbahnradien, S. 235), A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1917, Berlin 1917, S. 142—152, M. Born, Die Relativitätstheorie Einsteins, 2. Aufl., Berlin 1921, S. 254—257, A. Einstein, Geometrie und Erfahrung, Berlin 1921.

2) Gauß, Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, 1843 und 1846, Werke Bd. IV, S. 259ff.

der Fehlergrenzen lag. Irdische Dreiecke sind eben viel zu klein, um an ihnen erkennen zu können, ob die Winkelsumme $\gtreqless 180^0$ ist. Denn wir wissen ja, daß in der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie der Flächeninhalt eines Dreiecks dem Exzeß bzw. Defekt proportional ist. Hiernach ist überhaupt erst für weit über die Verhältnisse auf der Erde hinausgehende Dreiecke ein merklicher Exzeß oder Defekt zu erwarten. Wir müßten schon ein von drei Fixsternen gebildetes Dreieck direkt ausmessen können und finden, daß die Winkelsumme außerhalb aller Fehlergrenzen bestimmt größer oder kleiner als π ist, um in nichteuklidischer Hinsicht eine Entscheidung zu erhalten.

2. *Die Geodäsie kann also nicht mitsprechen.*

Wir wollen uns jetzt zur *Astronomie* hinwenden, um auf die Frage nach der Gültigkeit der einen oder anderen Geometrie, insbesondere auch nach der Größe der Weltkonstante $\pm \varkappa$ oder der Krümmung $\mp \frac{1}{\mu^2}$ vielleicht eine Antwort zu erhalten. Es handelt sich hier eben um Messungen an den Fixsternen. Es sei die Erdbahn als ein Kreis mit dem Mittelpunkt M angenommen (Fig. 175). Den Mittelpunkt M denken wir mit dem Fixstern A verbunden und im Punkte M auf der Verbindungslinie MA die Senkrechte BC in der Ebene der Erdbahn gezogen. Wir wollen nun voraussetzen, daß die Winkel $A\hat{B}M = A\hat{C}M$ oder $\beta = \gamma$, wenn nicht durch direkte Messung, so doch durch Berechnung aus anderen Messungen mit den feinsten Präzisionsinstrumenten bestimmt sind. Wenn wir die *euklidische Geometrie* annehmen, so ist der Winkel $\omega = \sphericalangle B\hat{A}M = \frac{\pi}{2} - \beta$ die Parallaxe δ des Fixsterns gemäß der Definition:

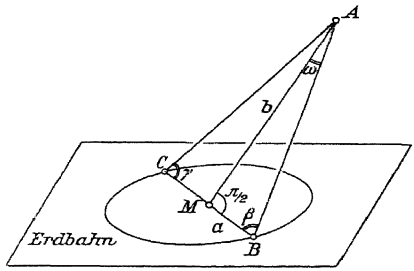


Fig. 175.

3. *Unter der Parallaxe eines Fixsterns verstehen wir den Winkel, unter dem (bei Gültigkeit der euklidischen Geometrie) in der angegebenen Weise der Erdbahnhalbmesser a von dem Fixstern aus erscheint.*[1])

Bei der Gültigkeit der hyperbolischen bzw. elliptischen Geometrie ist natürlich der Winkel $\omega = B\hat{A}M$ kleiner bzw. größer als $\frac{\pi}{2} - \beta = \delta$.

Wir wollen nun zunächst annehmen, daß die *hyperbolische Geometrie* in

1) Manche Autoren verstehen unter der Parallaxe auch wohl den Winkel, unter dem der Erdbahndurchmesser vom Fixstern aus erscheint.

unserem Raume herrscht.[1]) Dann gilt in dem rechtwinkligen Dreieck ABM nach der Formel (27) S. 178

$$\cos\omega = \cosh\frac{a}{\mu}\sin\beta. \tag{1}$$

Wir wissen nun, daß der Winkel ω sehr klein ist. Also ergibt sich, wenn wir noch den Erdbahnhalbmesser a als die Einheitsstrecke wählen,

$$\cosh\frac{1}{\mu} < \frac{1}{\sin\beta}.$$

Da β nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so muß μ eine sehr große Zahl sein (vgl. die Formel (20b) S. 176). Wir können daher setzen

$$\cosh\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{2\mu^2}.$$

Also ergibt sich
$$\frac{1}{2\mu^2} < \frac{1-\sin\beta}{\sin\beta} = \frac{1-\cos\delta}{\cos\delta},$$

wo
$$\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

(d. h. die Parallaxe bei der euklidischen Geometrie) ist. Setzen wir noch $\cos\delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$, so folgt schließlich

$$\mu^2 > \frac{1-\frac{\delta^2}{2}}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{2}$$

oder auch bei Vernachlässigung des zweiten belanglosen Gliedes auf der rechten Seite

$$\mu > \frac{1}{\delta}. \tag{2}$$

4. Die Maßzahl μ des Weltradius (oder der Weltmaßstrecke) für den Erdbahnhalbmesser als Einheitsstrecke muß also größer als der reziproke Wert der im Bogenmaß angegebenen euklidischen Parallaxe jedes Fixsternes sein, der absolute Betrag der Krümmung $\frac{1}{\mu^2}$ also kleiner als das Quadrat der Parallaxe.

Statt der von uns soeben ausgeführten einfachen Rechnung können wir an die Formel (1) anknüpfend, auch ohne Vernachlässigungen zu benutzen, wie folgt verfahren:

Es ist ja
$$\cosh\frac{a}{\mu} = \frac{e^{\frac{a}{\mu}} + e^{-\frac{a}{\mu}}}{2}.$$

---

1) Bei dieser Annahme hat schon Lobatschefskij die Frage nach der Größe der Krümmung untersucht. Es sei hingewiesen auf die Stellen: F. Engel, N. I. Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, Leipzig 1898, S. 22—24 und S. 248 bis 252. Vgl. auch: Bonola-Liebmann, a. a. O. S. 98.

Also ergibt die Gleichung (1), da ja $e^{\frac{\omega}{\mu}} > e^{-\frac{\omega}{\mu}}$ ist,

$$e^{\frac{\omega}{\mu}} = \frac{\cos\omega + \sqrt{\cos^2\omega - \sin^2\beta}}{\sin\beta}$$

oder, wenn wir den Grenzwert $\omega = 0$ wählen,

$$e^{\frac{a}{\mu}} < \frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}},$$

wo, wie bisher, $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$ ist, oder

$$\frac{a}{\mu} < \log\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\delta}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5\frac{\delta}{2} + \cdots\right).$$

Da nun
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\delta}{2}} = 2\left(\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} + \operatorname{tg}^3\frac{\delta}{2} + \operatorname{tg}^5\frac{\delta}{2} + \cdots\right)$$

ist, so folgt
$$\frac{a}{\mu} < \operatorname{tg}\delta$$

oder für $a = 1$
$$\mu > \frac{1}{\operatorname{tg}\delta} \qquad (2')$$

Im folgenden seien die Parallaxen von einigen Sternen zusammengestellt:

α Centauri	0,75″
Sirius	0,37″
Aldebaran	0,109″
Vega	0,083″
Capella	0,079″
Urs. min.	0,078″.

Wählen wir beispielsweise $\delta = 0{,}05''$ oder im Bogenmaß $\delta = 0{,}000\,000\,2424$, so ergibt die Gleichung (2)

$$\mu > 4\,120\,000 \text{ Erdbahnradien.} \text{ —}$$

Wir wenden uns nun zur Annahme der *elliptischen* Geometrie.[1]) Es sei übrigens hier sehr empfohlen, die unten genannten interessanten Arbeiten im einzelnen zu studieren. Es wird nun jetzt nicht möglich sein, bereits aus der

1) Als Literatur sei genannt: K. Schwarzschild, Über das zulässige Krümmungsmaß des Raumes, Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 35. Jahrgang, Leipzig 1900, S. 337—347, sowie: P. Harzer, Die Sterne und der Raum, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 17, Leipzig 1908, S. 237—267.

Beobachtung eines einzelnen Fixsternes auf eine untere Grenze der Größe $\mu = r$ zu schließen. Schwarzschild hat dementsprechend eine neue geistreiche Methode entwickelt, um aus der Messung der euklidischen Parallaxen *möglichst vieler* Fixsterne seine Schlüsse zu ziehen. Es ist jetzt ja im Dreieck ABM der Fig. 175 nach der trigonometrischen Formel (3) S. 171

$$\sin\frac{a}{\mu} = \operatorname{tg}\frac{b}{\mu}\operatorname{ctg}\beta$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{b}{\mu} = \frac{a}{\mu}\operatorname{ctg}\delta, \tag{3}$$

wo wieder $\delta = \frac{\pi}{2} - \beta$ die euklidische Parallaxe ist oder für $a = 1$

$$\operatorname{tg}\frac{b}{\mu} = \frac{1}{\mu\delta} \tag{3'}$$

oder

$$b = \mu \operatorname{arctg}\frac{1}{\mu\delta}. \tag{3''}$$

Aus der Formel (3″) folgt, daß an sich für jeden Wert μ sich eine reelle Entfernung b des einzelnen Fixsternes mit beobachtetem Werte δ ergibt.

Setzen wir noch vorübergehend $\frac{1}{\mu\delta} = \operatorname{tg}\vartheta$, so ergibt die Gleichung (3″)

$$b = \frac{1}{\delta}\frac{\vartheta}{\operatorname{tg}\vartheta}. \tag{3'''}$$

Nun ist

$$\frac{db}{d\vartheta} - \frac{1}{\delta}\frac{\sin 2\vartheta - 2\vartheta}{2\sin^2\vartheta}.$$

Da stets $\left(\text{für } 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin 2\vartheta < 2\vartheta$ ist, so ist $\frac{db}{d\vartheta}$ stets negativ, d. h.:

5. *Mit abnehmendem Wert ϑ oder zunehmendem Wert μ nimmt die Entfernung b beständig zu (bis zum Werte $b = \frac{1}{\delta}$ für die euklidische Geometrie, d. h. für* $\lim \mu = \infty$*).*

Wir nehmen jetzt einmal an, daß die gesamte Länge l der Geraden etwa nur gleich $30\,000\,\pi = 94\,200$ Erdbahnradien wäre, also $\mu = 30\,000$ Erdbahnradien (vgl. den Satz 3 S. 115). Dann lautet die Formel (3′)

$$\operatorname{tg}\frac{b}{3.10^4} = \frac{1}{3.10^4}\frac{1}{\delta}.$$

Es ergibt sich hiernach für

$\delta = 1''$ $b = 42\,800$ Erdbahnradien,

$\delta = 0{,}1''$ $b = 46\,700$ Erdbahnradien,

$\delta = 0''$ $b = 47\,100$ Erdbahnradien.

Für $\delta = 0''$, d. h. $\beta = \frac{\pi}{2}$, ist gemäß der Fig. 175 der Fixsternort A (als Schnittpunkt der beiden Lote in den Punkten M, B) der absolute Pol der

Geraden BC, d. h. es ist $b = \frac{l}{2} = \mu \frac{\pi}{2}$, also gleich der halben Länge der ganzen Geraden. Die Kugel um den Punkt M mit diesem Radius $\frac{l}{2}$ ist also in die absolute Polarebene dieses Punktes ausgeartet (vgl. die Fig. 116 S. 136).

Nun hat die Astronomie gefunden, daß es höchstens 100 Sterne mit einer Parallaxe $\delta \geqq 0{,}1''$ gibt, während also die übrigen rund 100 Millionen Sterne eine kleinere Parallaxe haben. Es müssen also die 100 Sterne mit $\delta \geqq 0{,}1''$ sich innerhalb der Kugel um den Punkt M (die Sonne) mit dem Radius von 46 700 Erdbahnradien befinden, während die 100 Millionen Sterne in dem übrigen Teil des Raumes zwischen der genannten Kugel und der absoluten Polarebene des Punktes M, d. h. in der Kugelschale mit der Differenz von nur 400 Erdbahnradien der begrenzenden Kugelflächen liegen würden. Schwarzschild hat dann auch noch die Volumina beider Raumteile berechnet und gefunden, daß der mittlere Abstand der 100 Sterne im ersten Raumteil 15 000 Erdbahnradien, der mittlere Abstand der übrigen Sterne im zweiten Raumteil dagegen nur 40 Erdbahnradien betragen würde. Diese überaus ungleiche Verteilung der Sterne berechtigt also zu dem Schlusse, daß die Annahme eines Weltradius $\mu = r = 30\,000$ Erdbahnradien doch viel zu klein ist. Schwarzschild berechnet dann weiter, daß bei der Annahme von wenigstens $\mu = r = 10^8$ Erdbahnradien oder 1600 Lichtjahren eine einigermaßen gleichmäßige Verteilung der sichtbaren Sterne in dem ganzen endlichen Raum stattfinden würde.

Somit haben wir das Resultat gewonnen:

6. Die Überlegungen der Astronomen ergeben, daß bei der Annahme der hyperbolischen, bzw. elliptischen Geometrie der Weltradius (die Weltmaßstrecke) $r = \mu$ wenigstens $4 \cdot 10^6$ Erdbahnradien bzw. 10^8 Erdbahnradien betragen muß.

Auch eine eigenartige Überlegung, auf die insbesondere Herr Harzer in seiner genannten Schrift näher eingeht, mag noch kurz Erwähnung finden. Wenn im Raume keine zu große Absorbtion des Lichtes stattfindet, so müßten bei Annahme eines elliptischen Raumes z. B. die nach der uns abgewandten Seite von unserer Sonne ausgehenden Lichtstrahlen nach Durchlaufen des ganzen Raumes auch (als schwachkonvergierende Lichtstrahlen) uns erreichen. Wir müßten also noch eine Nebensonne als einen Stern erblicken, der jedoch an anderer Stelle als die direkt gesehene Sonne stehen würde, da ja unser ganzes Sonnensystem inzwischen im Weltenraum weiter gewandert ist, ehe das Licht der Sonne uns erreicht. Doch ist bisher ein solches Gegenbild unserer Sonne nicht entdeckt worden. Auch sei darauf hingewiesen, daß ein Fixstern, der gerade nur die halbe Länge $\frac{l}{2}$ der Geraden von der Erde entfernt ist, gleichzeitig in entgegengesetzten Richtungen gesehen werden müßte. —

Nun mag es für uns Zeit sein, auf die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Frage eine Antwort zu geben. Es ist ja selbstverständlich, daß wegen der Einfachheit aller Formeln, z. B. der trigonometrischen Formeln, die euklidische Geometrie für alle praktischen Zwecke des Lebens doch weitaus die einfachste ist, zumal die euklidische Geometrie ohnehin die völlig ausreichende Annäherung auch bei Gültigkeit der hyperbolischen oder elliptischen Geometrie in dem unserer Erde nahen Raumteil, selbst für die Astronomie, ist. Es ist also für uns ein rein *philosophisches* Interesse, das uns zu der Beantwortung unserer Frage hinführt. Hier aber ist es doch von überaus großer Bedeutung, ob wir z. B. unseren Raum als einen endlichen (unbegrenzten) oder als einen unendlichen annehmen wollen. In dieser Hinsicht dürfte der *biprojektive Raum mit der bielliptischen Geometrie in ihm*, d. h. mit der analogen metrischen Geometrie in der Ebene wie die sphärische Geometrie auf der euklidischen Kugel, uns wohl als der einfachste erscheinen. Denn einmal ist der Raum dann analog wie in der elliptischen Geometrie nicht unendlich, was doch sehr bedeutsam ist, da das Unendliche für unser Denken völlig unvorstellbar ist; sodann ist die projektive Ebene auch sehr einfach in ihrer ganzen Ausdehnung gestaltet. Von den drei Geometrien, der elliptischen, der hyperbolischen oder der euklidischen Geometrie, würde analog der ersteren der Vorzug zu geben sein. Natürlich gehört eine jede solche Annahme einstweilen in das Gebiet der Mystik. Hervorgehoben sei auch noch, daß durch das Ausscheiden des Unendlichen in unserem Raume das Unendliche immer noch in dem Begriff der Zeit, besonders für die vergangene Zeit, für unser Denken nicht ausgeschaltet ist. Gewiß aber wird die Tatsache, daß bei allen uns zur Verfügung stehenden Erfahrungen die Annahme eines vom euklidischen Parallelenaxiom verschiedenen nichteuklidischen Parallelenaxioms ebenso möglich ist, von niemandem bestritten werden. Nahe liegt in dieser Hinsicht ja der Vergleich mit der Kopernikanischen Lehre von der Bewegung der Erde und der anderen Planeten um die Sonne. Doch ist hier der eigenartige Unterschied, daß man durch die Jahrtausende hindurch bei der Erklärung des Planetensystems immer an der *schwierigeren* Annahme festgehalten hat, vor allem unter dem Einfluß der kirchlichen Anschauungen, während man bei der Deutung unserer geometrischen Welt sogleich die praktisch und theoretisch (zwar nicht philosophisch) *einfachere* Annahme der euklidischen Geometrie allein hat gelten lassen. Jedenfalls aber hat es das tiefste Denken vieler Forscher seit Euklid (um 300 v. Chr.) und Ptolemäus (um 150 n. Chr.), beide in Alexandria, durch Jahrtausende erfordert, um in den beiden Gebieten volle mögliche Klarheit zu erringen.

Namenverzeichnis zu Band I und II.

[Die großen Ziffern geben die Bandzahlen, die kleinen die Seitenzahlen wieder, wobei die kleinen römischen Ziffern sich auf das Vorwort beziehen.]

Der vierdimensionale Raum. Von Dr. techn. *L. Eckhart,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Wien. Mit 29 Textfig. [IV u. 54 S.] kl. 8. 1929. (Math.-Phys. Bibl. 84.) Kart. *RM* 1.20

Nach vorbereitender Behandlung des ein-, zwei- und dreidimensionalen Punktraumes werden die Lagen- und Maßbeziehungen im R_4 entwickelt und auf einem neuen Wege mittels der dazugehörigen darstellenden Geometrie sozusagen greifbar gemacht. Die konstruktive Behandlung der Einstein-Minkowskischen Welt und ein Ausblick auf die verschiedenen hierher gehörigen Geometrien bilden den Abschluß.

Die vierte Dimension. Eine Einführung in das vergleichende Studium der verschiedenen Geometrien. Von Dr. *Hk. de Vries,* Prof. a. d. Univ. Amsterdam. Nach der 2. holländischen Ausg. ins Deutsche übertragen von Frau Dr. *R. Struik.* Mit 35 Fig. i. T. [IX u. 167 S.] 8. 1926. (Wiss. u. Hyp. XXIX.) Geb. *RM* 8.—

„Das Buch ist ein kleines, abgerundetes Kunstwerk, das jeder genießen kann, der die Schulmathematik noch einigermaßen beherrscht und die Fähigkeit zum abstrakten Denken bewahrt und ausgebildet hat. Das Schlagwort, das den Titel des Buches bildet, bezeichnet nur einen Teil seines Inhaltes; dieser ist in zwei Teile gegliedert, deren erster die mehrdimensionale, euklidische Geometrie behandelt, während der zweite den nichteuklidischen Geometrien gewidmet ist. Das kleine Werk kann warm empfohlen werden."
(Die Naturwissenschaften.)

Kurventheorie. Von Dr. *K. Menger,* Prof. a. d. Univ. Wien. [Erscheint Sommer 1931]

Analytische Geometrie. Von Dr. *L. Bieberbach,* Prof. a. d. Univ. Berlin. Mit 39 Fig. i. T. [IV u. 120 S.] 8. 1930. (Math. Leitf. 29.) Kart. *RM* 6.60

Die vorliegende Einführung in die analytische Geometrie ist an Vektoranalysis und Matrizenkalkül orientiert, um so den analytischen Apparat nach Möglichkeit dem geometrischen Objekt zu nähern und anzupassen. Sie erfüllt damit zugleich eine Aufgabe, in die sie sich mit der Differential- und Integralrechnung teilt: Einführung in modernes mathematisches Denken.

Lehrbuch der Differentialgeometrie. Von Dr. *A. Duschek,* Privatdozent a. d. Techn. Hochsch. in Wien u. Dr. *W. Mayer,* Privatdoz. a. d. Univ. Wien.

I. Band: **Kurven und Flächen im euklidischen Raum.** Von *A. Duschek.* Mit 14 Fig. i. T. [VIII u. 250 S.] gr. 8. 1930. Geb. *RM* 17.—

II. Band: **Riemannsche Geometrie.** Von *W. Mayer.* Mit 7 Fig. i. T. [VIII u. 245 S.] gr. 8. 1930. Geb. *RM* 17.—

„Das vorliegende Werk A. Duscheks und W. Mayers stellt einen durchaus geglückten Versuch dar, endlich einmal die klassischen Resultate der Kurven- und Flächentheorie in gut lesbarer Form auf dem Tensorkalkül aufzubauen und darüber hinaus für die Gedankengänge und Methoden der Riemannschen Geometrie weitere Kreise zu interessieren. Die Darstellung ist, was die Auswahl und Anordnung des Stoffes als auch den Aufbau des Kalküls anbetrifft, sehr einheitlich und systematisch ausgestaltet und dabei ausführlich und flüssig gehalten. Die Verfasser haben sich mit viel Erfolg um analytische Strenge bemüht. Hervorgehoben seien: die Erörterungen über Berührung höherer Ordnung zwischen Kurven und Flächen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, die Betrachtungen zur Curvatura integra, die Definitionen der Parallelverschiebung, das Kapitel über Variationsrechnung in Bd. II und die Betrachtungen über Räume mit konstanter Krümmung oder mit freier Beweglichkeit um einzelne Punkte.

Das vorliegende Werk ist eine wertvolle Bereicherung der Literatur über Differentialgeometrie. Der Druck ist mustergültig." (Deutsche Literaturzeitung.)

Darstellende Geometrie. Von Dr. *H. v. Sanden,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Hannover. (Math. Leitf. 2.) [Erscheint Frühjahr 1931]

Die Ausbildung der Raumanschauung nach Möglichkeit zu fördern, ist der Grundgedanke dieser Vorlesungen. Sowohl bei der Herleitung der geometrischen Methoden der Projektionslehre wie auch bei der Behandlung der zahlreichen Übungsbeispiele wird der Leser eindringlich genötigt, „los vom Papier" zu kommen und die Zeichnung nicht als Konstruktion in der Ebene anzusehen, sondern als Bild des vor dem Reißbrett im Raume vorzustellenden Körpers, an dem die geometrischen Operationen vorgenommen werden.

Praktische Infinitesimalrechnung. Von *F. F. P. Bisacre,* M. A. (Cambridge), Chartered Civil Engeneer, Glasgow. Berechtigte deutsche Ausg. unt. Mitw. von Dr. Dr.-Ing. h. c. *E. Trefftz,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden, hrsg. von Dr. *E. König,* Elberfeld. Mit 104 Abb. u. 5 Bildnistaf. [XI u. 364 S.] 8. 1929. Geb. *RM* 18.—

Mathematisches Praktikum. Von Dr. *H. v. Sanden,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Hannover. (Techn. Leitf. 27/28.)
1. **Band.** Mit 17 Fig. i. T. sowie 20 Zahlentaf. [V u. 122 S.] 8. 1927. Geb. *RM* 6.80
2. **Band.** [In Vorb. 1931]

Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Deutsche Bearb. des Werkes: *Webster,* Partial Differential Equations of mathematical physics. Von Dr. *G. Szegö,* Prof. a. d. Univ. Königsberg i. Pr. Mit 98 Fig. i. T. [VIII u. 428 S.] gr. 8. 1930. (Teubn. Lehrb. d. math. Wiss. XLIII.) Geb. *RM* 28.—

Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Von Dr. *G. Wiarda,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 8 Fig. [IV u. 183 S.] 8. 1930. (Samml. math.-phys. Lehrb. 25.) Geb. *RM* 9.60

Variationsrechnung. Autor. deutsche Bearb. des Werkes: *G. A. Bliss,* Calculus of Variations. Aus den „Carus Mathematical Monographs". Hrsg. von *F. Schwank,* Frankfurt a. M. [U. d. Pr. 1931]

Lehrbuch der Variationsrechnung. Von Dr. *C. Carathéodory,* Prof. a. d. Univ. München. [In Vorb. 1931]

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von Dr. *L. Bieberbach,* Prof. a. d. Univ. Berlin.
I. **Band: Elemente der Funktionentheorie.** 3., verb. Aufl. Mit 80 Fig. i. T. [VII u. 322 S.] gr. 8. 1930. Geb. *RM* 17.—
II. **Band: Moderne Funktionentheorie.** 2. Aufl. Mit zahlr. Fig. i. T. Geb. ca. *RM* 20.—

Lehrbuch der Funktionentheorie. Von Dr. *W. F. Osgood,* Prof. a. d. Harvard-Univ. Cambridge, Mass. (Teubn. Lehrb. d. math. Wiss. XX, 1—3.)
I. **Band:** 5. Aufl. Mit 174 Fig. [XIV u. 818 S.] gr. 8. 1928. Geb. *RM* 44.—
II. **Band. 1. Liefg.:** 2. Aufl. Mit 6 Fig. [VII u. 307 S.] gr. 8. 1929. Geb. *RM* 18.—.
2. Liefg. [U. d. Pr. 1931]

Mathematische Volkswirtschaftslehre. Eine Einführung. Von Dr. *O. Weinberger,* Oberlandesgerichtsrat in Wien. Mit 70 Fig. i. T. [XIV u. 241 S.] gr. 8. 1930. Geb. *RM* 18.—

Mathematische Forschungen zur Wert- und Preislehre. Deutsche Ausg. des Werkes: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. Von *Irving Fisher,* Prof. of Political Economy in Yale University (New Haven). Hrsg. von Dr. *A. Aron,* Frankfurt a. M. Mit Fig. i. T. [ca. 150 S.] gr. 8. 1930. Geb. ca. *RM* 9.60

Alte und neue mathematische Spiele. Eine Einführung in die Unterhaltungsmathematik. Von Dr. *G. Kowalewski,* Prof. a. d. Techn. Hochsch. in Dresden. Mit 104 Abb. u. Anleitungen zur Herstellung des Spielgeräts. [VII u. 145 S.] 8. 1930. Geb. *RM* 10.—

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin